Pauta Control #4 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-2

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1. a) $f(x) = \frac{a}{2} Ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2} Ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$, $a > 0$

(i) $f'(x) = \frac{a}{2} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{(a-\sqrt{a^2-x^2})+(a+\sqrt{a^2-x^2})}{(a-\sqrt{a^2-x^2})^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \frac{a}{2} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{[a-\sqrt{a^2-x^2}+a+\sqrt{a^2-x^2}]}{(a-\sqrt{a^2-x^2})^2} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= -\frac{a}{2} \frac{2ax}{\sqrt{a^2-x^2}[a^2-(\sqrt{a^2-x^2})^2]} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{a^2 x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}[1 - \frac{a^2}{x^2}] = -\frac{x(a^2-x^2)}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{x}\sqrt{a^2-x^2}$ **2.0 ptos**

(ii) La ecuación de la tangente en $P(x_0, y_0)$ es:

$y - y_0 = y_0'(x - x_0)$ con $y_0' = f'(x_0) = \frac{-1}{x_0}\sqrt{a^2 - x_0^2}$ (de (i))

Pero el punto $T \in$ (ejeOY), $x = 0 \Rightarrow y_T = y_0 - x_0 y_0' = y_0 + x_0 \frac{1}{x_0}\sqrt{a^2 - x_o^2}$

$\therefore$ $T(0, y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})$ **0.5 ptos**

Entonces, $PT = \sqrt{(x_P - x_T)^2 + (y_P - y_T)^2} = \sqrt{x_0^2 + [y_0 - (y_0 + \sqrt{a^2 - x_0^2})]^2}$

$PT = \sqrt{x_0^2 + (\sqrt{a^2 - x_0^2})^2} = \sqrt{x_0^2 + a^2 - x_0^2} = a$

Entonces $PT = a$ (constante) **0.5 ptos**

b)(i)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh(x) \longrightarrow f(0) = \sinh(0) = 0 \\ f'(x) &= \cosh(x) \longrightarrow f'(0) = \cosh(0) = 1 \\ f''(x) &= \sinh(x) \longrightarrow f''(0) = \sinh(0) = 0 \\ f'''(x) &= \cosh(x) \longrightarrow f'''(0) = \cosh(0) = 1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$f^n(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{si } n \text{ impar} \\ \sinh(x) & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$ **0.7 ptos**

Desarrollo entorno a $x_0 = 0$

$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}x^{2n} \qquad , \xi$ entre 0 y x

con $f^{(2n)}(\xi) = \sinh(\xi)$ **0.8 ptos**

ii) Para el cálculo de sinh(1) queda:

$senh(1) \approx 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = 1,175$ (no exigible)

El resto será de orden 5, es decir $R_5(1) = \frac{f^{(6)}(\xi)}{6!}1^6 = \frac{\sinh(\xi)}{720} \qquad , \xi \in (0,1)$ **1.0 pto**

Una cota de $R_5(1)$ podrá estimarse como:

$R_5(1) = \frac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2 \cdot 720} = \frac{e^{2\xi}-1}{2e^{\xi} \cdot 720} < \frac{e^2-1}{2 \cdot 720} < \frac{9-1}{2 \cdot 720} = \frac{4}{720} = \frac{1}{180} \approx 0{,}005$ **0.5 pto**

Es decir, la aproximación calculada tiene al menos 3 decimales exactos. (no exigible)

P2. a) (i)

$y = f(x) = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ es derivable en $x = 2$ y por hipótesis

f tiene un punto crítico en $x = 0$, entonces $f'(2) = 0$

$f'(x) = \frac{a(x-1)(x-4)-(ax+b)(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{-2a+2a+b}{(x-1)^2(x-4)^2} = 0$

$\therefore b = 0$

Además $P(2, -1)$ es punto de la curva $\Rightarrow f(2) = -1$

Entonces, $\frac{2a+b}{1(-2)} = -1 \Rightarrow 2a + b = 2 \wedge b = 0 \Rightarrow a = 1$

$\therefore y = f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-4)}$ **1.0 pto**

Reemplazando los valores de a y b en $f'(x)$ queda:

$f'(x) = \frac{(x-1)(x-4)-x(2x-5)}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{x^2-5x+4-2x^2+5x}{(x-1)^2(x-4)^2}$

$\therefore f'(x) = \frac{4-x^2}{(x-1)^2(x-4)^2} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x-1)^2(x-4)^2}$

Estudiando el crecimiento en torno a $x = 2$, se concluye que $f'(2-\delta) > 0 \wedge f'(2+\delta) < 0 \Rightarrow x = 2$ es punto de máximo local. **1.0 pto**

(ii) $f'(x)$ también se anula en $x = -2$, y con igual procedimiento se concluye que $f'(-2-\delta) < 0 \wedge f'(-2+\delta) > 0 \Rightarrow$ $x = -2$ es punto de mínimo local.
Es decir, $P(-2, f(-2)) = P(-2, \frac{-1}{9})$ es mínimo local. **1.0 pto**

Observación: También es válido calcular $f''(x)$ para concluir que:

$f''(2) < 0 \Rightarrow x = 2$ es pto de máximo local.
$f''(-2) > 0 \Rightarrow x = -2$ es pto de mínimo local.

b)$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{\text{sen}(x)} & \text{si } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ c & \text{si } x = 0, \end{cases}$

i) f será continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = f(0) = c$

Entonces, $\lim\limits_{x \mapsto 0} f(x) = lim_{x \mapsto 0}(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}) = lim_{x \mapsto 0}(\dfrac{\sin x - x}{x \sin x}) = \ldots$ por L'Hopital

$\ldots = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} \ldots$ por L'Hopital

$\ldots = \lim\limits_{x \mapsto 0} \dfrac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \dfrac{0}{2-0} = 0$ esto es: $c = 0$ **1.0 pto**

ii) La función, continua en 0, queda:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} & \text{si } x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{si } x=0,\end{cases}$$

$f'(0)=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\frac{1}{h}-\frac{1}{\sin h}}{h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\sin h-h}{h^2\sin h}$ y por L'Hopital... **0.5 ptos**

$=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{\cos h-1}{2h\sin h+h^2\cos h}=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{-\sin h}{2\sin h+4h\cos h-h^2\sin h}$ y por L'Hopital...

$=\lim\limits_{h\mapsto 0}\dfrac{-\cos h}{6\cos h-6h\sin h-h^2\cos h}=\dfrac{-1}{6-0-0}=\dfrac{-1}{6}$

Entonces $f'(0)=\frac{-1}{6}$ **1.5 ptos**

P3. $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3Lnx}{x}$

(i) Claramente el dominio de $f(x)$ lo impone Lnx, entonces, $Domf : \mathbb{R}^+$

Por inspección, $f(1) = 1 + 1 - \frac{2}{1} - \frac{3Ln1}{1} = 0$

$\therefore x = 1$ es cero de f **0.5 ptos**

(ii) asíntota vertical: $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x^2 + x - (2 + 3Lnx)}{x} \to \dfrac{0 + 0 - (-\infty)}{0} \to \infty$

Entonces, $x = 0$ (eje OY) es asíntota vertical de f **0.5 ptos**

Asíntota horizontal, $\lim_{x\mapsto\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto\infty}[x + 1 - \frac{2+3Lnx}{x}] \to \infty - 0 \to \infty$

púes $\lim_{x\mapsto 0^+}[\frac{2+3Lnx}{x}] =$ ...por L'Hopital...

$= \lim_{x\mapsto 0^+} \frac{3}{x} = 0$ Entonces f no tiene asíntota horizontal. **0.5 ptos**

iii) asíntota oblicua será de la forma $y = mx + n$ en que

$m = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\mapsto\infty}[1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3Lnx}{x^2}] = 1$

pues $\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{2}{x^2} \to 0$ y $\lim_{x\mapsto\infty} \frac{Lnx}{x^2} =$ ... por L'H ... $= \lim \frac{1}{2x^2} = 0$ **0.5 ptos**

$n = \lim_{x\mapsto\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\mapsto\infty}(1 - \frac{2}{x} - \frac{3Lnx}{x}) = 1$

Entonces es asíntota oblicua $y = x + 1$ **0.5 ptos**

iv) Cálculo de f':

$f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^2} - 3 \cdot \dfrac{1 - Lnx}{x^2} = \dfrac{x^2 + 2 - 3 + 3Lnx}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1 + 3Lnx}{x^2}$ **0.5 ptos**

Claramente $x = 1$ es cero de $f'(x)$ y es el único cero pues:

x	(0,1)	(1,∞)
f'(x)	< 0	> 0
f	decrece	crece

Entonces, $x = 1$ es punto de mínimo absoluto de f (pues $f(1) = 0$) **1.0 pto**

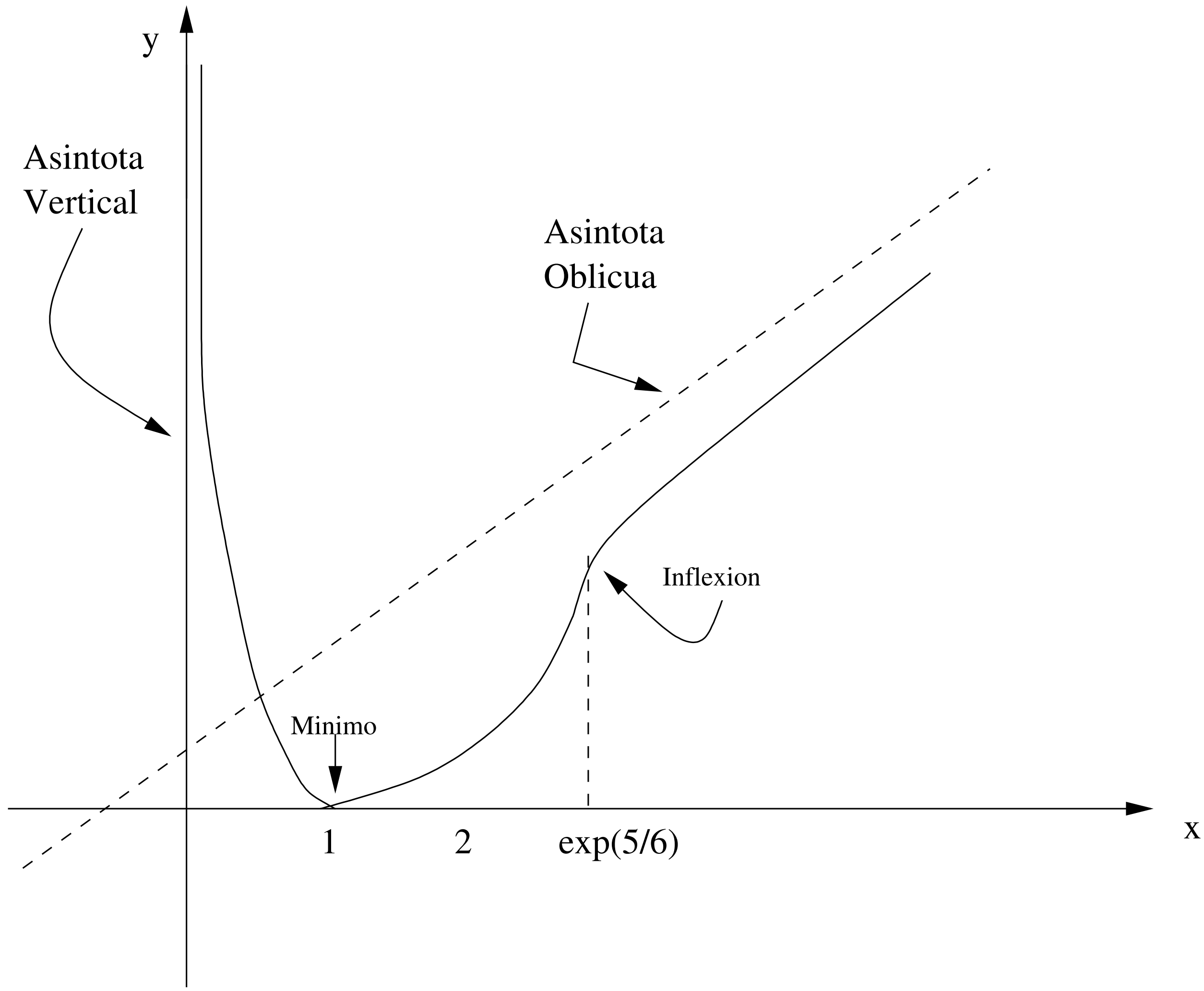
v) Calculo de f''

$f''(x) = \dfrac{(2x + \frac{3}{x})x^2 - 2x(x^2 - 1 + 3Lnx)}{x^4} = \dfrac{2x^2 + 3 - 2x^2 + 2 - 6Lnx}{x^3} = \dfrac{5 - 6Lnx}{x^3}$ **0.5 ptos**

$f''(x) = 0$ si $5 - 6Lnx = 0 \Rightarrow x = e^{\frac{5}{6}}$ es el único cero de $f''(x)$

x	$(0,e^{\frac{5}{6}})$	$(e^{\frac{5}{6}},\infty)$
f”	>0	<0
f	conexa	concava

Entonces $x = e^{\frac{5}{6}}$ es punto de inflexión **1.0 pto**



Recorrido de $f : \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$ **0.5 pto**