Pauta Control #4 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-2

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

i) Se define la función $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{\operatorname{sen} hx} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$ Sabiendo que f es diferenciable en 0 y g es dos veces diferenciable en 0 se pide determinar, justificando, el valor de $g(0)$, y los valores de a y $f'(0)$ en función de $g'(0)$ y $g''(0)$.

- f es diferenciable en 0 y por lo tanto continua en 0, es decir, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, esto es, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{\operatorname{sen} hx} = f(0) = a$.

Pero $\lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{\operatorname{sen} hx}$ no existe si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (pués $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} hx = 0$).
Así, necesariamente $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, y como g es diferenciable y por lo tanto continua en 0, sigue que

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \boxed{g(0) = 0}$$ **(1.0 pto.)**

Ahora, f continua en 0, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$ y
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{\operatorname{sen} hx} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{g'(x)}{\cos hx} = g'(0)$.

Así: $\boxed{a = g'(0)}$ **(0.5 ptos.)**

Finalmente, $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{g(h)}{\operatorname{sen} h(h)} - g'(0)}{h}$.
$= \lim\limits_{h\to 0} \frac{g(h)-g'(0)\operatorname{sen} h(h)}{h \operatorname{sen}(h)} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \frac{g'(h)-g'(0)\cos h(h)}{\operatorname{sen} h(h)+h\cos h(h)} \left(\to \frac{g'(0)-g'(0)}{0}\right)$
$\overset{\text{L'Hop}}{=} \lim\limits_{h\to 0} \frac{g''(h)-g'(0)\operatorname{sen} h(h)}{2\cos h(h)+h\operatorname{sen} h(h)} = \frac{g''(0)}{2}$

Así $\boxed{f'(0) = \dfrac{g''(0)}{2}}$ **(1.5 ptos.)**

ii) $y = f(x)$ está definida implicitamente por $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Demuestre que el punto $P(1,-2)$ es un mínimo local de f.
Derivando implicitamente $2x + y + xy' + 2yy' = 0$ de donde $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$, de aquí,
$y'_{(1,-2)} = -\frac{2\cdot 1-2}{1+2(-2)} = 0$.
Además, $y'' = -\frac{(2+y')(x+2y)-(2x+y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$ **(1.0 pto.)**
Se puede evaluar inmediatamente en $(x,y) = (1,-2)$ e $y'_{(1,-2)} = 0$ o bien resumir $y'' = -\frac{3(y-xy')}{(x+2y)^2}$ y evaluar.
De cualquier forma $y''_{(1,-2)} = -\frac{3(-2-0)}{[1+2(-2)]^2} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} > 0$
Sigue que $y'_{(1,-2)} = 0$ e $y''_{(1,-2)} > 0$ (convexa) **(0.5 ptos.)**
Es decir, $P(1,-2)$ es un mínimo Local de f.

iii) Verifique que la derivada de $f(x) = \operatorname{arc\,sen}(2x-1) + 2\ \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ es nula en $[0,1]$.

En efecto, $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + \frac{2}{1+\frac{1-x}{x}}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)'$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{4x-4x^2}} + x \cdot \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{-x-(1-x)}{x^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \sqrt{\frac{x}{x^2(1-x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} \equiv 0
\end{aligned}
$$

(1.5 ptos.)

Problema 2

i) Una planta productora de cobre con capacidad instalada de 9(ton/día) puede producir x toneladas de cobre corriente e y toneladas de cobre fino diarias. Si se sabe que las produccioes diarias de cobre fino y corriente cumplen la relación $y = \frac{40-5x}{10-x}$ y que el precio de venta del cobre fino es 3.6 veces el precio del cobre corriente, se pide determinar cual es la producción diaria que proporciona un ingreso máximo.

- Si p es el inverso por venta de cada tonelada de cobre corriente, el ingreso por cada tonelada de cobre fino será 3.6 p.

Así, el ingreso por ventas será $I_{(x,y)} = px + 3.6\ y$.
Pero x, y se relacionan como $y = \frac{40-5x}{10-x}$, de modo que
Ingreso $= I(x) = px +\ 3.6\ p\frac{40-5x}{10-x} = p\left[x +\ 3.6\ \frac{40-5x}{10-x}\right]$
Calculamos $I'(x) = p\left[1 +\ 3.6\ \frac{-5(10-x)+40-5x}{(10-x)^2}\right]$ es decir $I'(x) = p\left[1 - \frac{36}{(10-x)^2}\right]$
Sigue que $I'(x) = 0$ si $\frac{36}{(10-x)^2} = 1 \Rightarrow 10 - x = \pm 6$ es decir $x = 10 \mp 6$ de donde $x = 4(t/d)$ (admisible) o $x = 16(t/d)$ (fuera de rango) **(2.0 ptos.)**
Además $I''(x) = -p\frac{72(10-x)}{(10-x)^4} = -p\frac{72}{(10-x)^3}$ de donde $I''(4) = -\frac{72p}{6^3} = -p/3 < 0$ (concava) y por lo tanto, $x = 4$ genera un máximo en $I(x)$ y la producción optima será $x = 4(t/d)$ e $y = \frac{40-20}{10-4} = \frac{10}{3} =\ 3.\bar{3}(t/d)$ **(1.0 pto.)**
(NO SE PIDE) El ingreso diario será $I = 4p +\ 3.6\ \frac{10}{3} = 16p$.

ii) Sea $f(x)$ continua en $[0, \infty)$, diferenciable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en $I\!R^+$. Use el Teorema del Valor Medio para proba que $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$ en $I\!R^+$ y deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $I\!R^+$

- Por hipótesis, $\forall x \in I\!R^+$, f es continua en $[0, x]$ y diferenciable en $(0, x)$.

Entonces por TVM $\exists \xi \in (0, x)$ tal que $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi)$, es decir, $\frac{f(x)}{x} = f'(\xi)$, con $\xi \in (0, x)$.
Pero f' es creciente en $(0, x)$, entonces $f'(\xi) \leq f'(x)$ de donde
$\frac{f(x)}{x} = f'(\xi) \leq f'(x) \quad \forall x \in I\!R^+$. **(1.0 pto.)**
Además $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \quad \forall x \in I\!R^+$.
Pero de lo anterior $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x) \Rightarrow xf'(x) - f(x) \geq 0$.
De modo que $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \geq 0 \quad \forall x \in I\!R^+$.
Sigue que $g(x)$ es creciente en $I\!R^+$. **(1.0 pto.)**

iii) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2}$.
Claramente es una forma de L'Hopital $\left(\frac{0}{0}\right)$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{-e^{-x}+e^{-x}-xe^{-x}}{e^{-x}+xe^{-x}}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-xe^{-x}}{2x(e^{-x}+xe^{-x})}$
$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{-e^{-x}}{2(e^{-x}+xe^{-x})} = -1/2$ **(1.0 pto.)**

OTRA FORMA OBSERVAR que $\frac{ln(e^{-x}+xe^{-x})}{x^2} = \frac{ln e^{-x}(1+x)}{x^2}$
$= \frac{ln^{-x}+ln(1+x)}{x^2} = \frac{-x+ln(1+x)}{x^2} \xrightarrow[\text{2 veces}]{\text{L'Hopital}} -1/2$

Problema 3

Considere la función definida por $f(x) = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x}$

i) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para $f(x)$ en torno a $x_0 = 0$ (Sin Resto).

- El polinomio de orden 2 será de la forma
  $P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0)/2!x^2$
  $f(x) = e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x} \Rightarrow f(0) = 1$
  $f'(x) = \sqrt{2}\cos x e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x} \Rightarrow f'(0) = \sqrt{2}$ **(0.7 ptos.)**
  $f''(x) = \sqrt{2}[-\mathrm{sen}\, x e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x} + \sqrt{2}\cos^2 x e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x}]$
  $\therefore f''(x) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x}[\sqrt{2}\cos^2 x - \mathrm{sen}\, x] \Rightarrow f''(0) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

Así, $P_2(x) = 1 + \sqrt{2}x + x^2$ **(0.8 ptos.)**

ii) Estudiar completamente $f(x)$. Se piede

a) Dominio, ceros (si existen), signos de f, continuidad y periodicidad.
b) Cálculo de $f'(x)$, crecimiento y valores extremos relativos y absolutos.
c) Cálculo de $f''(x)$, concavidad (convexidad) y puntos de inflexión.
d) Tabla de valores principales, recorrido y gráfico aproximado.

a) Es inmediato por la composición de exp y sen que $\mathrm{Dom} f = I\!R$,no existen ceros puesto que exp $(\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x) > 0 \quad \forall x \in I\!R$ y por lo mismo sig $(f) > 0 \quad \forall x \in I\!R$.
f es continua por ser composición de continuas y f es periódica, lo mismo que $\mathrm{sen}\, x$, con período 2π. **(0.5 ptos.)**

b) f' ya fué calculada en (i), $f'(x) = \sqrt{2}\cos x e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x}$
Además $f'(x) = 0$ si $\cos x = 0$ en $[-\pi, \pi]$, por ejemplo.
Así, $f'(x) = 0$ en $[-\pi, \pi]$ si $x = \pi/2 \;\wedge\; x = -\pi/2$
Entonces para el crecimiento se tiene: signos de $f'(x)$ son los signos de $\cos x$

x	$(-\pi, -\pi/2)$	$(-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$
$f'(x)$	< 0	> 0	< 0
	decrece	crece	decrece

Con este estudio puede ya concluirse que $x = -\pi/2$ es pto. de mínimo y $x = \pi/2$ es pto. de máximo **(1.0 pto.)**

c) $f''(x)$ también ya fué calculado en (i)
$f''(x) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}\,\mathrm{sen}\, x}[\sqrt{2}\cos^2 x - \mathrm{sen}\, x]$
$f''(x) = 0$ si $\sqrt{2}\cos^2 x - \mathrm{sen}\, x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}(1 - \mathrm{sen}^2 x) - \mathrm{sen}\, x = 0$
$\Rightarrow \sqrt{2}\,\mathrm{sen}^2 x + \mathrm{sen}\, x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \mathrm{sen}\, x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2\sqrt{2}} = \frac{-1 \pm 3}{2\sqrt{2}}$
Así $\mathrm{sen}\, x = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < -1$ es incompatible. **(1.0 pto.)**
o $\quad \mathrm{sen}\, x = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \pi/4 \;\wedge\; x = \frac{3\pi}{4}$ en $[-\pi, \pi]$.
Con lo cual

x	$(-\pi, \pi/4)$	$(\pi/4, 3\pi/4)$	$(3\pi/4, \pi)$
$f''(x)$	> 0	< 0	> 0
	convexa	concava	convexa

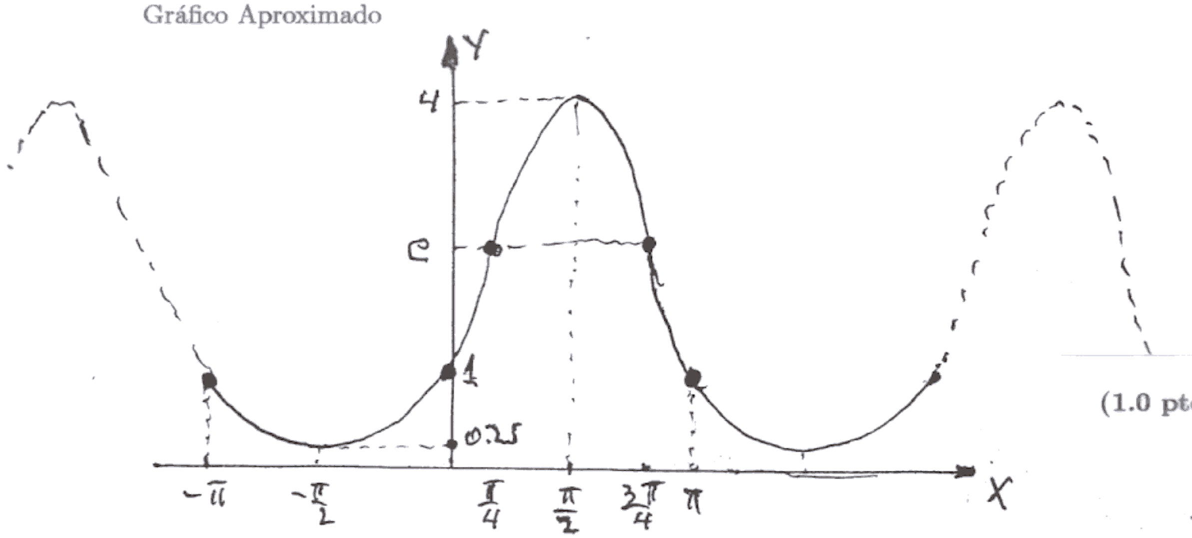
con este estudio $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$ son puntos de inflexión **(1.0 pto.)**

d) Tabla de Valores

x	$f(x)$
0	1
$-\pi, \pi$	1
$-\pi/2$	$1/e^{\sqrt{2}} \approx 0.25$
$+\pi/2$	$e^{\sqrt{2}} \approx 4$
$\pi/4$	e
$3\pi/4$	e

Recorrido $\left[\frac{1}{e^{\sqrt{2}}}, e^{\sqrt{2}}\right]$

Gráfico Aproximado



(1.0 pto.)