Control 4, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (2 de Septiembre)

Solución P1.
Parte a$_1$:
Claramente
$$f'(x) = -\frac{1}{(x-a_1)^2} - \frac{1}{(x-a_2)^2} - \cdots - \frac{1}{(x-a_n)^2}$$
Como cada denominador es un cuadrado perfecto y hay un igno menos delante de el, se cumple que $f'(x) < 0$.

Parte a$_2$:
Derivando:
$$\begin{aligned} P'(x) &= (x-a_2)\cdots(x-a_n) + (x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n) + \cdots + (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) \\ &= \frac{P(x)}{x-a_1} + \frac{P(x)}{x-a_2} + \cdots + \frac{P(x)}{x-a_n} = P(x)\cdot f(x), \end{aligned}$$
de donde resulta $f(x) = \frac{P'(x)}{P(x)}$.
Derivando una segunda vez
$$f'(x) = \frac{P''(x)P(x) - P'(x)P'(x)}{P(x)^2}$$
Como esta derivada debe ser negativa (ver parte a$_1$), se concluye la desigualdad pedida.

Parte b:
Consideremos la función $f(x) = b_1^x + b_2^x + \cdots + b_n^x$. Claramente $f(0) = n$ y por lo tanto la desigualdad dada en el enunciado, establece que
$$f(x) \geq f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Esto implica que $x = 0$ es un punto crítico de f, es decir $f'(0) = 0$.

Derivando:
$$f'(x) = b_1^x \ln(b_1) + b_2^x \ln(b_2) + \cdots + b_n^x \ln(b_n).$$
En cero se tiene que
$$f'(0) = \ln(b_1) + \ln(b_2) + \cdots + \ln(b_n) = \ln(b_1 b_2 \cdots b_n).$$
Como la derivada debe ser nula, entonces
$$b_1 b_2 \cdots b_n = 1.$$

Solución P2.
Parte a:

Usando la variable auxiliar h se tiene que el área del trapecio es:

$$A = \frac{1}{2}(a+x)h.$$

Pero por pitágoras

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{x-a}{2}\right)^2,$$

de donde se despeja

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2},$$

donde $x \in [0, 3a]$.

Reemplazando se obtiene que:

$$A(x) = \frac{1}{4}(a+x)\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}.$$

Esta función es derivable en $(0, 3a)$. Además $A(0) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ (área de un triángulo equilátero de lado a) y $A(3a) = 0$.

Derivando:

$$\begin{aligned}
A'(x) &= \frac{1}{4}\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2} + \frac{1}{4}(a+x)\frac{2a - 2x}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}}\left\{2ax - x^2 + 3a^2 + (a+x)(a-x)\right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}}\left\{ax - x^2 + 2a^2\right\} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2ax - x^2 + 3a^2}}\left\{(a+x)(2a-x)\right\}
\end{aligned}$$

Con esto, el signo de A' depende sólo del factor $2a - x$, el cual vale cero para $x = 2a$, (punto crítico) es positivo para $x < 2a$ (función A(x) creciente) y negativo para $x > 2a$ (función $A(x)$ decreciente).

Conclusión: el valor de x que maximiza el área del trapecio es $x = 2a$.

Parte b:

Del gráfico de f' se concluye la siguiente información:

Intervalo	signo de f'	Conclusión	crecimiento de f'	Conclusión
(0,1)	$f'(x) > 0$	f creciente	f' creciente	f convexa
(1,2)	$f'(x) > 0$	f creciente	f' decreciente	f concava
(2,3)	$f'(x) < 0$	f decreciente	f' decreciente	f concava
(3,4)	$f'(x) < 0$	f decreciente	f' creciente	f convexa

Por lo tanto $x = 1$ es punto inflexión, $x = 2$ es punto de máximo global, $x = 3$ es punto de inflexión.

Los extremos $x = 0$ y $x = 4$ son mínimos locales. No se puede saber cual de ellos en el mínimo global.

Usando el terorema del valor medio se tiene que:

$$f(x) = f(0) + f'(\xi)x$$

Por lo tanto, en el valor máximo que está en $x = 2$ se obtiene que:

$$f(2) \leq f(0) + 1 \cdot 2 = 3$$

Solución P3.
Parte a:

$f(x) = 0$ si y solamente sí el argumento del logaritmo es uno. O sea $|x+1| = |x|$, es decir $x = -\frac{1}{2}$
El signo de f depende del signo del logaritmo y el factor $(x+1)$.
El logaritmo es positivo ssi $|x+1| > |x|$, lo que se cumple para $x > -\frac{1}{2}$
Por lo tanto: $f(x)$ es positiva en $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \infty)$
y es negativa en $(-1, -\frac{1}{2})$.

Parte b:

Cuando $x \to \pm\infty$ se tiene que $\left|\frac{x+1}{x}\right| \to 1$ por lo tanto el logaritmo tiende a 0 y multiplicado por $x+1$ se obtiene una forma de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\log\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{(x+1)^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x} = 1$$

La función tiene asíntota horizontal $y = 1$ hacia $\pm\infty$.

Cuando $x \to -1$ se tiene que $x+1 \to 0$ y el logaritmo tiende a menos infinito. Por lo tanto es una nueva forma de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to-11} \frac{\log\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{x} = 0$$

Por lo tanto la función es reparable en -1 con el valor $f(-1) = 0$ para hacerla continua en ese punto.

cuando $x \to 0$ la fracción en el logaritmo tiende a $+\infty$ luego el logaritmo también. Y como el factor $(x+1)$ exterior tiende a 1, la función tiende a $+\infty$.

por lo tanto la función tiene una asíntota vertical en $x = 0$

Parte c:

Como $g(s) = \ln|s|$ es continua en $[x, x+1]$ y derivable en $(x, x+1)$ se puede aplicar el Teorema del valor medio el cual se escribe

$$\ln|x+1| - \ln|x| = \frac{1}{\xi}, \qquad \xi \in (x, x+1)$$

ordenando se obtiene la desigualdad pedida, considerando que

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

Parte d:

Derivando:

$$f'(x) = \ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right) - \frac{1}{x}$$

Usando la desigualdad (c) se tiene que $f'(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$ por lo tanto f en esos intervalos es estrictamente decreciente.

Parte e:

Derivando una vez mas:

$$f''(x) = \frac{1}{x^2(x+1)}$$

Por lo tanto f es convexa en $(-1, 0)$ y $(0, \infty)$ y es cóncava en $(-\infty, -1)$.

Parte f:

Como

$$f'(x) = \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x},$$

se concluye que cuando $x \to -1^+$ se tiene que $f'(x) \to -\infty$.

Además, cuando $x \to 0^-$ se tiene que $-\ln|x| \to +\infty$ y $-\frac{1}{x} \to +\infty$. Por lo tanto $f'(x) \to +\infty$.

Como $f''(x) > 0$ en este intervalo, entonces f' es estrictamente creciente.

Juntando elementos, continuidad, crecimiento estricto, parte en $-\infty$ y termina en $+\infty$, se concluye usando el TVI que f' tiene un cero en $(-1, 0)$ y es único.