Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 19 de Octubre del 2000.

PAUTA CONTROL 5

MA12A CALCULO 2000

Problema 1.

a) (1.0 pto.) Calcular $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+x}{2+x} dx$.
Tenemos que $\frac{1+x}{2+x} = 1 - \frac{1}{2+x}$. $\int_0^1 1 = 1$ y $\int_0^1 \frac{1}{2+x} = (\ln(2+x)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$.
Entonces, $I = 1 + \ln(2) - \ln(3)$.

b) (1.0 pto.) Calcular $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2n^2+ni}$, reconociendo en el término general una suma de Riemann.
Podemos buscar la partición haciendo $\frac{n+i}{2n^2+ni} = \frac{1}{n}\frac{n+i}{2n+i} = \frac{1}{n}\frac{1+\frac{i}{n}}{2+\frac{i}{n}}$. Entonces, $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n+i}{2n^2+ni}$ es una suma de Riemann asociada a la función $f(x) = \frac{1+x}{2+x}$ y la partición $P = \left\{0, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ del intervalo $[0,1]$. Como la función f es continua en $[0,1]$ sabemos que $a_n \to \int_0^1 f(x)\,dx$. Luego el límite vale $I = 1 + \ln(2) - \ln(3)$.

c) (2.0 pts.) Calcular $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{\text{sen}(x)} e^{-t^2} dt}{1-\cos(x)}$.
Vamos a aplicar l'hôpital, pues $F(x) = \int_0^{\text{sen}(x)} e^{-t^2} dt$ es una función continua en $[0,+\infty)$, derivable en $(0,+\infty)$ y tal que $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$. Además $F'(x) = e^{-\text{sen}^2(x)}\cos(x)$. Entonces, $L = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)+xF'(x)}{\text{sen}(x)}$.
Nuevamente, F' es una continua en $[0,+\infty)$, derivable en $(0,+\infty)$ y tal que $\lim_{x\to 0} F'(x) = 1$. Entonces, $\lim_{x\to 0} F(x) + xF'(x) = 0$ con lo que $L = \lim_{x\to 0} \frac{2F'(x)+xF''(0)}{\cos(x)}$. Además, $F''(x) = \cos^2(x)(-2\text{sen}(x))\,e^{-\text{sen}^2(x)} - e^{-\text{sen}^2(x)}\text{sen}(x) = -e^{-\text{sen}^2(x)}\text{sen}(x)(1+2\cos^2(x))$ entonces $\lim_{x\to 0} F''(x) = 0$ con lo que $L = \frac{2+0}{1} = 2$

d) (2.0 pts.) Sea $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función creciente y continua en su dominio, derivable en $(0,+\infty)$ y con $f(0) = 0$. Para $x \in [0,+\infty)$ sea $F(x) = x\displaystyle\int_0^x f^2(t)\,dt$
Demostrar que F es creciente y convexa.
Siendo f continua, derivable y creciente, sabemos que $f' \geq 0$.
Siendo f creciente y $f(0) = 0$, sabemos que $f \geq 0$. Además $f^2 \geq 0$.
Siendo f continua, sabemos que $G(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt$ es derivable y como $f^2 \geq 0$ y $x \geq 0$ tenemos que $G(x) \geq 0$. Luego, F es derivable, $F'(x) = G(x) + xf^2(x)$ y $F'(x) \geq 0$. Entonces, F es creciente.
Por la mismas razones anteriores, $F'(x)$ es derivable y $F''(x) = 2f^2(x) + 2xf \cdot f'$.
Todos lo términos involucrados son ≥ 0 de modo que $F''(x) \geq 0$, para todo $x \in [0,+\infty)$. Concluimos que F es convexa.

Problema 2.

a) (2.0 pts.) Calcular, usando una descomposición en fracciones parciales, $I = \displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)(1+x)}$.
Determinemos a, b y c para que $\frac{x}{(1+x^2)(1+x)} = \frac{ax+b}{(1+x^2)} + \frac{c}{(1+x)}$. Tenemos que $(ax+b)(1+x) + c(1+x^2) = (a+c)x^2 + (a+b)x + b + c$. Luego $a+c = 0 = b+c$, de donde $a = b = -c$ y $a+b = 1$. Entonces, $a = b = \frac{1}{2} = -c$.
$\int \frac{x+1}{(1+x^2)} = \int \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}$. Tenemos que $\int \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$ y $\int \frac{1}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + C$.
Además, $\int \frac{1}{1+x} = \ln(|1+x|)$. Finalmente $I = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}(x) + \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right) - \ln(|1+x|)\right) + C$.

b) (2.0 pts.) Calcular, usando el cambio de variables $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = u$, $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{1 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$.
Aplicando el cambio de variables obtenemos la integral

$$J = \int \frac{2u}{1+u^2} \frac{2}{1+u^2} \frac{1}{1 + \frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2}} = 4\int \frac{u(1+u^2)}{(1+u^2)^2(1+u^2+2u+1-u^2)} = 2\int \frac{u}{(1+u^2)(1+u)}$$

Aplicando la parte anterior sabemos que $J = \left(\operatorname{arctg}(u) + \ln\left(\sqrt{1+u^2}\right) - \ln(|1+u|)\right) + C$. Para obtener I debemos evaluar J en $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$I = \frac{x}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\left|1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|}\right) + C = \frac{x}{2} + \ln\frac{\sec\left(\frac{x}{2}\right)}{\left|1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right|} + C = \frac{x}{2} - \ln\left(\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\right|\right) + C$$

b) (2.0 pts.) Calcular, aplicando una integración por partes, $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$.
No hay muchas alternativas: $v' = 1$ y $u = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)$, con u' dado por

$$u' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{1+x}}\sqrt{\frac{x}{1+x}}(1+x)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

Luego $I = x\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}$. Para calcular $J = \int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)}$ hacemos el cambio de variables $\sqrt{x} = u$ con lo que obtenemos la integral

$$K = \int \frac{u^2}{u(1+u^2)} 2u = \int \frac{2u^2}{(1+u^2)} = 2\left(\int 1 - \int \frac{1}{1+u^2}\right) = 2u - 2\operatorname{arctg}(u) + C$$

Así, $I = x\operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{x}{1+x}}\right) - \sqrt{x} + \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C$

Problema 3.

a) (1.5 pts.) Para $n \geq 2$ calcular el área de la región $R = \left\{(x,y) : x^n \leq y \leq x^{\frac{1}{n}}\right\}$.
El área pedida es aquella encerrada por las curvas x^n y $x^{\frac{1}{n}}$para $x \in [0,1]$.

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{n}} - x^n\right) dx = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}]_0^1 - \frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{\frac{1}{n}+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}$$

b) (1.5 pts.) Calcular el volumen del sólido obtenido de rotar, en torno al eje OX, el área bajo la función $f(x) = xe^{-x^3}$ entre 0 y 1, dado por $\pi \int_0^1 f^2(x)\, dx$.

$$V = \pi \int_0^1 x^2 e^{-2x^3} dx = -\pi(\frac{e^{-2x^3}}{6}]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)$$

c) (1.5 pts.) Calcular el volumen del sólido obtenido de rotar, en torno al eje OY, el área bajo la función $f(x) = xe^{-x^3}$ entre 0 y 1, dado por $2\pi \int_0^1 xf(x)\, dx$.

$$V = 2\pi \int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx = -2\pi(\frac{e^{-x^3}}{3}]_0^1 = \frac{2\pi}{3}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

d) (1.5 pts.) Calcular el largo de la curva definida por la función $f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ entre 0 y a, dado por $\int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2\left(\frac{x}{a}\right)}dx = \int_0^a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx = a\operatorname{senh}\left(\frac{x}{a}\right)]_0^a = a\operatorname{senh}(1)$$