Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 18 de Octubre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 5

MA-12A CALCULO 2001

Problema 1.

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[0,1]$ y diferenciable en $(0,1)$ tal que $f(0) = 0$ y $\forall x \in (0,1)$, $0 \leq f'(x) \leq 1$. Se pide probar que $\left[\int_0^1 f(t)dt\right]^2 \geq \int_0^1 f(t)^3 dt$, para lo cual proceda como sigue:

(a) (1.0 pto.) Pruebe que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \geq 0$.

(b) (2.5 pts.) Se define $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante $G(x) = 2\int_0^x f(t)dt - f(x)^2$. Muestre que $G(x)$ es creciente y deduzca que $\forall x \in [0,1]$, $G(x) \geq 0$.

(c) (2.5 pts.) Defina $F(x) = \left[\int_0^x f(t)dt\right]^2 - \int_0^x f(t)^3 dt$. Pruebe que $F'(x) = f(x)G(x)$, establezca el crecimiento de $F(x)$ y deduzca que $\forall x \in [0,1]$, $F(x) \geq 0$. Concluya.

Sol.

(a) (**1.0 pto.**)

Una alternativa es utilizar el Teorema del Valor Medio (TVM): para todo $x \in]0,1[$ existe $z \in]0,x[$ tal que $f(x) - f(0) = f'(z)x$, y como $f(0) = 0$ y $f'(z) \geq 0$ luego $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Otra forma es notar que dado que $\forall x \in (0,1)$, $f'(x) \geq 0$ con f continua en $[0,1]$ entonces f es creciente en $[0,1]$. En particular, $\forall x \in]0,1]$, $f(x) \geq f(0) = 0$.

(b) (**2.5 pts.**) Como f es continua en $[0,1]$ podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) para concluir que G es continua en $[0,1]$ y más aún

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2f(x) - 2f(x)f'(x) \\ &= \underbrace{2f(x)}_{\geq 0}\underbrace{(1 - f'(x))}_{\geq 0} \geq 0 \end{aligned}$$

de modo que G es creciente. En particular, $\forall x \in [0,1]$, $G(x) \geq G(0) = 2\int_0^0 f(t)dt - f(0)^2 = 0 - 0 = 0$.

(c) (**2.5 pts.**) Nuevamente por el TFC tenemos que F es continua y más aún

$$F'(x) = 2\int_0^x f(t)dt f(x) - f(x)^3 = f(x)(2\int_0^x f(t)dt - f(x)^2) = \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\underbrace{G(x)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Por lo tanto, F es creciente y en consecuencia $F(x) \geq F(0) = (\int_0^0 f(t)dt)^2 - \int_0^0 f(t)^3 dt = 0$. En conclusión:

$$F(x) = (\int_0^x f(t)dt)^2 - \int_0^x f(t)^3 dt \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

en particular para $x = 1$, que era lo que se quería demostrar.

Observaciones:

(a) También se puede usar desarrollo de Taylor.

(b) Cálculo de la derivada = **1.0 pto.**; deducir que G es creciente = **0.5 pto.**; argumento de signo = **1.0 pto.**

(c) Cálculo de la derivada = **1.0 pto.**; deducir que F es creciente = **0.5 pto.**; argumento y conclusión = **1.0 pto.**

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) Encuentre una fórmula de recurrencia para $I_n = \int (x+1)^n \sqrt{x} dx$.

(b) (4.0 pts.) Considere la función $f : [1,5] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$.

  (b.1) Calcule las sumas inferior $s(f,P)$ y superior $S(f,P)$ si $P = \{x_0, ..., x_n\}$ es una partición que sigue una progresión geométrica, es decir $x_i = q^i$ donde $q = \sqrt[n]{5}$. Nota: Su resultado debe quedar sólo en términos de n.

  (b.2) Use el resultado anterior y el Teorema Fundamental del Cálculo para probar que $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5} - 1) = ln(5)$.

Sol.:

(a) Utilicemos la fórmula de integración por partes con $u = (x+1)^n$ y $dv = \sqrt{x}dx$ de modo que $du = n(x+1)^{n-1}dx$ y $v = \frac{2}{3}x^{3/2}$, lo que permite obtener

$$I_n = \frac{2x^{3/2}(x+1)^n}{3} - \frac{2n}{3} \int (x+1)^{n-1} x^{3/2} dx$$

(**1.0 pto.** por usar técnica de integración por partes sin error). Pero

$$\begin{aligned}
\int (x+1)^{n-1} x^{3/2} dx &= \int (x+1)^{n-1} x\sqrt{x} dx \\
&= \int (x+1)^{n-1}(x+1-1)\sqrt{x} dx \\
&= \int ((x+1)^n \sqrt{x} - (x+1)^{n-1}\sqrt{x}) dx \\
&= I_n - I_{n-1}
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$I_n \quad = \quad \frac{2x(x+1)^n\sqrt{x}}{3} - \frac{2n}{3}(I_n - I_{n-1})$$

y así

$$3I_n + 2nI_n = 2x(x+1)^n\sqrt{x} + 2nI_{n-1}$$

de donde

$$I_n = \frac{2x(x+1)^n\sqrt{x}}{3+2n} + \frac{2n}{3+2n}I_{n-1}$$

Observación: hemos usado "ni quita ni pone", despejar, etc... Estos cálculos dependen de la forma en que se usó la integración por partes. Se asigna **1.0 pto.** por los cálculos.

(b.1) Como $f(x) = 1/x$ es decreciente en $[1,5]$ entonces se tiene que $m_i(f) = f(x_i) = 1/x_i$ y $M_i(f) = f(x_{i-1}) = 1/x_{i-1}$ (**0.5 pto.**). Por lo tanto, para la suma inferior se tiene

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^i}\Delta x_i,$$

pero $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = q^i - q^{i-1} = q^{i-1}(q-1)$ (**0.5 pto.**), de modo que

$$s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q^i}{q^i q}(q-1) = \frac{q-1}{q}n = \frac{\sqrt[n]{5}-1}{\sqrt[n]{5}}n.$$

Similarmente, la suma superior es

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{q^{i-1}}q^{i-1}(q-1) = n(q-1) = n(\sqrt[n]{5}-1)$$

Observación: las dos definiciones de $s(f,P)$ y $S(f,P)$ valen **0.5 pto.** en total, y el **0.5 pto.** adicional es por el álgebra y los resultados.

(b.2) Como $f(x) = 1/x$ es continua en [1,5] entonces se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} S(f,P) = \lim_{n\to\infty} s(f,P) = \int_1^5 f(x)dx, \tag{1}$$

siempre que el paso de la partición tienda a 0, que en este caso se cumple pues $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1$ (hasta aquí **1.0 pto.**). Además,

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 \frac{1}{x}dx = ln(5) - ln(1) = ln(5). \tag{2}$$

Juntando (1) y (2) se obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{5-1}) = ln(5)$$

(cálculo de la integral y la conclusión = **1.0 pto.**).

Problema 3.

(a) (3.0 pts.) Calcule el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas de ecuaciones $y^2 = \frac{x}{1-x}$, $y^2 = 2(1-x)$ y el eje OX.

(b) (3.0 pts.) Sea R la región del plano OXY limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = mx$ ($m > 0$). Se pide encontrar el valor de m tal que los volúmenes generados por la rotación de R en torno a OX y a OY sean iguales.

Sol.:

(a) La región pedida es la que está sobre el eje OX y bajo la función $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ entre 0 y x_0, y bajo la función $\sqrt{2(1-x)}$ entre x_0 y 1, donde x_0 es la solución de la ecuación

$$\frac{x}{1-x} = 2(1-x)$$

con $x \in [0,1)$. Entonces x_0 está dado por $x_0 = \frac{5-\sqrt{25-4\cdot 4}}{4} = \frac{1}{2}$ (**0.5 pto.**). Así, el área buscada es la suma de I_1 e I_2 donde

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

e

$$I_2 = \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{2(1-x)} dx$$

(**0.5 pto.** por plantear ambas integrales). La función $\sqrt{2(1-x)}$ tiene como primitiva a $(2(1-x))^{\frac{3}{2}} \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)$ que evaluada en los extremos da $I_2 = \frac{1}{3}$ (**0.5 pto.**). Una primitiva para la función $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ se calcula haciendo el cambio de variable $x = \operatorname{sen}^2(u)$. Con esto el problema se reduce a calcular una primitiva de la función $\frac{\operatorname{sen}(u)}{\cos(u)} \cdot 2\operatorname{sen}(u)\cos(u) = 2\operatorname{sen}^2(u)$ (**0.5 pto.**). Por identidades trigonométricas, esta última función es igual a $1-\cos(2u)$ que tiene como primitiva a $u - \frac{\operatorname{sen}(2u)}{2} = u - \operatorname{sen}(u)\cos(u)$. Volviendo a la variable x obtenemos que

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} = arcsen\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x}\sqrt{1-x} + C$$

(**0.5 pto.** por la primitiva). Evaluado en los extremos se obtiene $I_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. Así, el área buscada vale $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}$ (**0.5 pto.**).

(b) La región R es aquella que queda por debajo de la recta $y = mx$ y sobre la párabola $y = x^2$ desde 0 hasta el punto de intersección x_0 de estas dos funciones (**0.5 pto.**). El punto x_0 es la solución no nula de la ecuación $mx = x^2$, es decir, $x_0 = m$ (**0.5 pto.**). Los volúmenes de interés están dados por $V_{OX} = \pi \int_0^{x_0} \left((mx)^2 - (x^2)^2\right)$ y $V_{OY} = 2\pi \int_0^{x_0} (x(mx) - x(x^2))$

(**0.5 pto.** por plantear las integrales). Todas las integrales involucradas son de la forma $\int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (**0.5 pto.**). Entonces,

$$V_{OX} = \pi \left(m^2 \frac{m^3}{3} - \frac{m^5}{5} \right) = \pi m^5 \frac{2}{15}$$

y

$$V_{OY} = 2\pi \left(m \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} \right) = 2\pi m^4 \frac{1}{12}$$

(**0.5 pto.**). Entonces el valor de $m > 0$ que hace $V_{OX} = V_{OY}$ es $m = \frac{15}{12}$ (**0.5 pto.**).