U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control #5 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.-

(i) Sea $f(x) := \int_1^x x\,\ln(tx)\,dt$, definida en $(0,+\infty)$.

(a) (2 ptos.) Encuentre $\int \ln(t)$ y calcule $f(2)$.

(b) (2 ptos.) Demuestre que $f'(x) = (4x-1)\ln(x) \quad \forall x \in (0,+\infty)$.

(ii) (2 ptos.) Asumiendo que la función $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ es continua en $[0,\tan(1)]$, encuentre la derivada de la función $f(x) = \int_0^{\tan(x)} \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,dt$ para $x \in [0,1]$.

Pauta.-

(i) **(a)** La primitiva $\int \ln(x)\,dx$ se puede calcular usando integración por partes con $f'(t) = 1$, $g = \ln(t)$ y entonces $f(t) = t$ y $g'(t) = \frac{1}{t}$. Con esto

$$\int \ln(t) = t\,\ln(t) - \int \frac{t}{t} = t\,\ln(t) - t + C.$$

También es lícito hacer el cambio de variable $t = e^u$ y $t' = e^u$ y obtener

$$\int \ln(t) = \int u\,e^u,$$

que integrada por partes con $f(u) = u$ y $g'(u) = e^u$ queda

$$\int u\,e^u = u\,e^u - e^u + C,$$

que escrita en la variable original nos da

$$\int \ln(t) = t\,\ln(t) - t + C.$$

Cálculo de $f(2) = \int_1^2 2\,\ln(2t)\,dt$. Como $\ln(2t) = \ln(2) + \ln(t)$ tenemos que

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(\ln(2) + (t\ln(t) - t)|_1^2) \\ &= 2(\ln(2) + 2\ln(2) - 2 - (\ln(1) - 1)) \\ &= 2(3\ln(2) - 1) \end{aligned}$$

Pauta: [**1pto**] aplicación de la o las técnicas de integración. [**0.25pto**] integrales conocidas: constantes o e^u. [**0.25pto**] familia de primitivas bien descrita, o sea, en la solución aparece la constante genérica de integración. [**0.25pto**] cálculo de la primitiva de $\ln(2t)$: aplicación del TFC, luego separar $\ln(2t)$ o hacer el cambio de variables $t = u/2$. [**0.25pto**] manejo algebraico.

(b) Desarrollando $\ln(tx) = \ln(t) + \ln(x)$ se obtiene

$$f(x) = x(x-1)\,\ln(x) + x\int_1^x \ln(t)\,dt,$$

en este punto podemos primero calcular $\displaystyle\int_1^x \ln(t)dt$ y luego derivar o viceversa. Procediendo de la segunda forma obtenemos

$$f'(x) = (x-1)\ln(x) + (x-1) + x\ln(x) + \int_1^x \ln(t)\,dt + x\ln(x).$$

Usando $\int_1^x \ln(x)\,dt = x\,\ln(x) - x + 1$ concluir que

$$f'(x) = 3x\,\ln(x) + x - 1 - \ln(x) + x\,\ln(x) - x + 1 = (4x-1)\,\ln(x).$$

Pauta: [**0.5pto**] uso del TFC, mención que ln es continua en $(0, +\infty)$ y derivada de $\int_1^x \ln(t)$. [**0.5pto**] Uso del TFC: $\int_1^x \ln(t) = x\ln(x) - x + 1$ ya evaluado, pero aquí tiene el interés que se diferencia la variable de integración de la variable x. [**0.5pto**] cálculo correcto de derivadas. [**0.5pto**] manejo algebraico.

(ii) Sea $G(u) = \displaystyle\int_0^u \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))\,dt = \int_0^u g(t)\,dt$. Como estamos asumiendo que $g(t)$ es continua en $[0, \tan(1)]$, el TFC nos asegura que la función G es derivable en el intervalo $(0, \tan(1))$ y que $G'(u) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(u))$. Ahora $f(x) = G(\tan(x))$ con lo que la derivada de f es la derivada de una composición de funciones. Así

$$f'(x) = G'(\tan(x))\tan'(x) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(x))\sec^2(x) = \operatorname{arc\,sen}(x)\sec^2(x).$$

Pauta: [**0.5pto**] verificación de hipótesis del TFC: mención que $g(t) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(t))$ debe ser continua en el intervalo indicado para que G sea derivable. [**1pto**] Uso del TFC: $G'(u) = \operatorname{arc\,sen}(\arctan(u))$. [**0.5pto**] Uso de la regla de la cadena y derivada de la función tangente.

P2.-

(i) Sea $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$. Si

$$R = \left\{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\right\}.$$

(a) (2 ptos.) Encuentre el área de la región R.

(b) (2 ptos.) Encuentre el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar la región R en torno al eje OX.

(ii) (2 ptos.) Dada la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

encuentre el área del manto generado al rotar esta elipse en torno al eje OX entre $x = -1$ y $x = 1$.

Pauta.- **(i)** **(a)** El área buscada es el valor de la integral

$$A(R) = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx.$$

Para calcular esta integral hacemos el cambio de variable $u = 1 - x^2$ con el cual $du = -2x\, dx$, $u(0) = 1$ y $u(1) = 0$. Así, el área buscada es

$$A(R) = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3} u^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

[2ptos]

(b) El volumen buscado está dado por la fórmula

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\, dx = \pi \int_0^1 x^2(1-x^2)\, dx.$$

Como el integrando es la función polinomial $x^2 - x^4$, el valor de la integral es

$$\int_0^1 (x^2 - x^4)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}|_0^1 = \frac{2}{15}.$$

Así, el volumen buscado es

$$V = \frac{2\pi}{15}.$$

[2ptos]

(ii) La intersección de la elipse con el eje OX son los puntos $x \in I\!R$ que satisfacen $x^2 = 2$, es decir $x = \sqrt{2}$ y $x = -\sqrt{2}$. Luego, para $x \in [-1, 1]$, la ecuación de la elipse define en el eje OY positivo la función

$$f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2 - x^2}, \quad x \in [0, 1].$$

Por lo tanto, usando simetría o la paridad de f, el área buscada está dada por la fórmula

$$A = 2\pi \int_{-1}^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 4\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Como

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{-x}{\sqrt{2 - x^2}}$$

se tiene que

$$f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$$

y así

$$A = 2\pi \int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Para calcular esta integral usamos la sustitución trigonométrica $x = 2\sin(\theta)$, con la cual $dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$, $\sqrt{4-x^2} = 2\cos(\theta)$, $\theta(0) = 0$ y $\theta(1) = \operatorname{arc\,sen}(1/2) = \pi/6$. Luego, el área buscada es

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^{pi/6} 4\cos^2(\theta)\,d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{pi/6} (2+2\cos(2\theta))\,d\theta \\ &= 2\pi(2\theta+\sin(2\theta))|_0^{\pi/6} \\ &= 2\pi(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

[2ptos]

P3.- **(i)** (3 ptos.) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

(ii) Sea f una función infinitamente derivable en $I\!R$. Sea $I_n = \displaystyle\int e^{-x} f^{(n)}(x)\,dx$, donde $f^{(n)}$ denota la $n-$ésima derivada de f.

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $\forall x \in I\!R$,

$$I_n = I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)}(x).$$

(b) (1.5 ptos.) Si $f^{(k)} = 0$ para un cierto $k \in I\!N$, $k \geq 1$, demostrar que $\forall x \in I\!R$

$$I_0 = \int e^{-x} f(x)\,dx = -e^{-x}\sum_{i=0}^{k-1} f^{(i)}(x) \;+\; C,$$

siendo C una constante real.

Pauta.- **(i)** Usando fracciones parciales

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} &= \left(\frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{A(x+1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+D+2C)x^2 + (A+C+2D)x + A+B+D}{(x+1)^2(x^2+1)} \end{aligned}$$

[0.5pto]

Comparando coeficientes se obtiene el sistema lineal

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ A + B + D + 2C &= 3 \\ A + C + 2D &= 2 \\ A + B + D &= 1 \end{aligned}$$

de donde

$$A = -1, \quad B = C = D = 1.$$

[0.5pto]
Reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{3x^2+2x+1}{(x+1)^2(x^2+1)} &= -\int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\,dx \\ &= \left(-\ln(x+1) - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) \right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} \\ &= -\ln(2) - \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{2} + \arctan(1) + \ln(1) + \frac{1}{1} - \frac{\ln(1)}{2} - \arctan(0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

[1.5pto] por primitivas, **[0.5pto]** por evaluación.

(ii) **(a)** Usando integración por partes (integramos e^{-x} y derivamos $f^{(n)}$) se obtiene

$$\begin{aligned} I_n &= \int e^{-x} f^{(n)} = -\int -e^{-x} f(n+1) - e^{-x} f^{(n)} \\ &= I_{n+1} - e^{-x} f^{(n)} \end{aligned}$$

[1.5pto]

(b) Aplicamos de manera recurrente la fórmula de la parte anterior para obtener

$$\begin{aligned} I_0 &= I_1 - e^{-x} f' \\ &= I_2 - e^{-x} f' - e^{-x} f'' \\ &\vdots \\ &= I_{k-1} - e^{-x} f' - e^{-x} f'' - \ldots - e^{-x} f^{(k-1)} \\ &= I_k - e^{-x} f' - e^{-x} f'' - \ldots - e^{-x} f^{(k-1)} - e^{-x} f^{(k)} \end{aligned}$$

pero $f^{(k)} = 0$ implica que $I_k = 0$ (salvo constante) de donde se obtiene el resultado pedido. **[1.5pto]**
También se puede razonar más rigurosamente por inducción sobre k, pero esto tiene el mismo puntaje.