Pauta Control #5 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 24/05 18:00 M–Z, 19:00 A–L). Esta se puede obtener en la página:
puede obtener `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- a) **(2.0 pts.)** Calcule

1) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{e^x-1}dx$

2) $\displaystyle\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx$

b) **(2.0 pts.)** Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{senh}\left(\frac{k}{n}\right)$

c) **(2.0 pts.)** Encuentre el desarrollo de Taylor en torno a $x_0 = 0$ de orden 2 de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

Encuentre además una cota numérica aproximada del resto para $x = \frac{1}{2}$.

Pauta.- a) 1) Haciendo el cambio de variables $u = e^x$, tenemos $du = e^x\,dx$, de donde se obtiene:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^x-1}dx = \int \frac{u^2}{u-1}du + C$$

Ahora notamos que

$$\frac{u^2}{u-1} = \frac{u^2-1+1}{u-1} = \frac{(u+1)(u-1)+1}{u-1} = u+1+\frac{1}{u-1}$$

de donde

$$\int \frac{u^2}{u-1}du = \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1| + C.$$

Nota: Aquí y maś adelante C denota una constante real arbitraria genérica.

2) Integramos por partes dos veces:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x\, dx &= -\frac{1}{2}\int 3\cos 3x \operatorname{sen} 2x\, dx + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + C \\
&= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\int 3\operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx - \frac{1}{2}\cos 3x\cos 2x\right) + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + C \\
&= \frac{9}{4}\int \operatorname{sen} 3x\cos 2x\,dx + \frac{3}{4}\cos 3x\cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} 2x + C
\end{aligned}$$

de donde

$$-\frac{5}{4}\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx = \frac{3}{4}\cos 3x \cos 2x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + C$$

esto es

$$\int \operatorname{sen} 3x \cos 2x \, dx = -\frac{3}{5}\cos 3x \cos 2x - \frac{2}{5}\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + C$$

b) Utilizando una partición uniforme de $[0,1]$ en intervalos $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, $k = 1, \ldots, n$ se obtiene una suma de Riemann cuyo límite es una integral definida:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \operatorname{senh}\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \operatorname{senh}\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 x \operatorname{senh} x \, dx.$$

Por otro lado, integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x \operatorname{senh} x \, dx &= -\int_0^1 \cosh x \, dx + x\cosh x\Big|_{x=0}^{1} \\
&= -\operatorname{senh} x\Big|_{x=0}^{1} + x\cosh x\Big|_{x=0}^{1} \\
&= \cosh(1) - \operatorname{senh}(1) \\
&= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

c) Cálculemos las 3 primeras derivadas, la primera usando el TFC:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-x^2} \\
f''(x) &= -2x\, e^{-x^2} \\
f'''(x) &= (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}
\end{aligned}$$

evaluando en $x = 0$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0 \\
f'(0) &= 1 \\
f''(0) &= 0
\end{aligned}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(c) \\
&= x + \frac{x^3}{3!}(4c^2 - 2)\, e^{-c^2}
\end{aligned}$$

donde c es algún punto entre 0 y x.
Estimando el resto: para $x = 1/2$, como $0 < c < \frac{1}{2}$, y como $e^{-x^2} \leq 1$, $\forall x \in [0, 1/2]$, se obtiene

$$\left|\frac{x^3}{3!}(4c^2 - 2)\, e^{-c^2}\right| \leq \frac{1}{2^3\, 3!}(4\frac{1}{2^2} + 2) = \frac{3}{8\cdot 6} = \frac{1}{16}$$

Nota: hay otras formas de expresar el resto, por ejemplo, la forma integral, esto debe considerarse correcto. El error se debe acotar en módulo.

Puntaje:	**(a1)**	**[1 pto]**	Primera primitiva
	(a2)	**[1 pto]**	Segunda primitiva
		[-0.2 pto]	Olvidar C
	(b)	**[1 pto]**	Identificar la suma de Riemman como la integral definida
		[0.8 pto]	Cálculo de la integral
		[0.2 pto]	Evaluación en los límites
	(c)	**[0.5 pto]**	Derivadas
		[0.5 pto]	Polinomio de Taylor
		[0.5 pto]	Expresión para el resto
		[0.5 pto]	Cota aproximada para el resto

P2.- a) i) **(1.5 pts.)** Calcule el área A de la región encerrada por las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ entre las abscisas 0 y $\frac{\pi}{4}$.

ii) **(1.5 pts.)** Calcule el volumen V del sólido de revolución generado por la rotación de la región precedente en torno al eje OX.

b) **(3.0 pts.)** Para $n \in \mathbb{N}$ se define

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

Calcule I_0 e I_1. Encuentre una recurrencia que permita calcular I_{n+2} en función de I_n.

Pauta.- a) i)

$$A = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \operatorname{sen} x)\, dx = (\operatorname{sen} x + \cos x)|_{x=0}^{\pi/4} = \sqrt{2} - 1.$$

ii)

$$V = \pi \int_0^{\pi/4} (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2(x))\, dx = \pi \int_0^{\pi/4} \cos 2x\, dx = \pi \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x|_{x=0}^{\pi/4} = \pi/2.$$

b)

$$\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1} \\
&= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{6} \\
I_1 &= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\, dx = -\sqrt{4-x^2}\Big|_{x=0}^{1} \\
&= \sqrt{4} - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Recordando que

$$\frac{d}{dx}\sqrt{4-x^2} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

e integrando por partes I_{n+2}, se obtiene que

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 x^{n+1} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= (n+1)\int_0^1 x^n\sqrt{4-x^2}\, dx - x^{n+1}\sqrt{4-x^2}\big|_{x=0}^{1} \\
&= (n+1)\int_0^1 \frac{x^n(4-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}\, dx - \sqrt{3} \\
&= 4(n+1)I_n - (n+1)I_{n+2} - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

de donde, despejando I_{n+2} se encuentra la relación

$$I_{n+2} = 4\left(\frac{n+1}{n+2}\right) I_n - \frac{\sqrt{3}}{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nota: es posible que algunas personas hayan intentado lo siguiente: sea

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{\sqrt{4-t^2}}\, dt$$

entonces, integrando por partes

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{x^n}{\sqrt{4-x^2}} dx \\
&= -2\int_0^1 I_n(x)\, x\, dx + x^2\, I_n(x)\big|_{x=0}^{1} \\
&= -2\int_0^1 I_n(x)\, x\, dx + I_n
\end{aligned}$$

que es también una especie de recurrencia, pero no completamente correcta ya que aparece $I_n(x)$ y no solamente $I_n = I_n(1)$. En este caso se deben descontar 0.5 puntos.

Puntaje:	**(ai)**	**[1.5 pto]**	Cálculo de A
	(aii)	**[1.5 pto]**	Cálculo de V
	(b)	**[0.5 pto]**	Primitiva I_0
		[0.25 pto]	Límites de I_0
		[0.5 pto]	Primitiva I_1
		[0.25 pto]	Límites de I_1
		[1.5 pto]	Recurrencia
		[-0.5 pto]	Si se estableció “recurrencia” integral

P3.- a) Sean $f, g: [0,1] \to [0,1]$ dos funciones continuas. Además se sabe que g es derivable en $(0,1)$ y satisface las relaciones

$$g(1) < 1, \quad \text{y} \quad 0 \le g'(x) \le 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

Considere ahora la función F definida en $[0,1]$ por

$$F(x) = 2x - 1 - \int_0^{g(x)} f(t)dt.$$

Para demostrar que F posee un único cero se pide lo siguiente:

i) **(1.5 pts.)** Pruebe que F es continua y que $F(0) < 0 < F(1)$. Concluya que F posee al menos un cero en $[0,1]$.
Indicación: Use el hecho que $f(x) \le 1$ y $0 \le g(1) < 1$ para demostrar que $\int_0^{g(1)} f(t)dt < 1$.

ii) **(1.5 pts.)** Pruebe que F es derivable en $(0,1)$ y que es estrictamente creciente. Deduzca que el cero de F es único.

b) Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\dfrac{1}{f}$ es integrable se pide los siguiente:

i) **(1.5 pts.)** Si $S()$ y $s()$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f}, P) - s(\frac{1}{f}, P) \le \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

ii) **(1.5 pts.)** Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

Pauta.- a) i) F es continua por álgebra de funciones continuas y por la composición de las funciones

$$h(y) = \int_0^y f(t)\,dt \qquad \text{y} \qquad g(x)$$

ambas continuas: g por hipótesis y h por el TFC pues f es integrable por ser continua.
Nota: basta que f sea integrable para que h sea continua.
Ahora

$$F(0) = -1 - \int_0^{g(0)} f(t)\,dt$$

pero $g(0) \ge 0$ y $f \ge 0$, de la monotonía de la integral se tiene que

$$\int_0^{g(0)} f(t)\,dt \ge 0$$

por lo que

$$F(0) \le -1 < 0.$$

Por otro lado
$$F(1) = 1 - \int_0^{g(1)} f(t)\,dt$$
pero $0 \le g(1) < 1$ y $0 \le f \le 1$, entonces de nuevo por la monotonía de la integral:
$$0 \le f \le 1 \Rightarrow 0 \le \int_0^{g(1)} f(t)\,dt \le \int_0^{g(1)} 1\,dt = g(1) - 0 = g(1) < 1$$
por lo que
$$F(1) > 0.$$
Nota: es importante que la última integral sea estrictamente menor que 1.
Por el TVI para funciones continuas, F debe anularse en algún punto de $(0,1)$ (interior).

ii) F es derivable por álgebra de funciones derivables y por la composición de las funciones derivables h y g. En efecto: g es derivable por hipótesis y h es derivable por ser f continua, esto lo sabemos del TFC.
Nota: es necesario que f sea continua para que h sea derivable.
Calculemos F', usando la regla de la cadena y el TFC obtenemos:
$$F'(x) = 2 - g'(x)f(g(x)), \quad x \in (0,1).$$
Como $0 \le g' \le 1$ y $0 \le f \le 1$ entonces $0 \le g'(x)f(g(x)) \le 1$, $\forall x \in (0,1)$ de modo que
$$F'(x) \ge 2 - 1 = 1 > 0, \quad x \in (0,1)$$
esto es, F es estrictamente creciente en $(0,1)$.
Su cero debe ser único: si hubiera dos ceros distintos x_1 y x_2 de F en $(0,1)$, entonces del TVM sabemos que existiría un punto entre x_1 y x_2 donde la derivada de F se anularía, lo que no puede ser pues $F' > 0$ en $(0,1)$.
Nota: si esta deducción es sólo formal deben descontarse 0.2 ptos.

b) i) Dada una partición $a = x_0 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ entonces:
$$S\left(\frac{1}{f}\right) - s\left(\frac{1}{f}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(M_i\left(\frac{1}{f}\right) - m_i\left(\frac{1}{f}\right)\right)(x_{i+1} - x_i)$$
donde M_i y m_i son el supremo e ínfimo de $\frac{1}{f}$ en el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ respectivamente. Veamos que estos existen. En efecto, f es integrable y por lo tanto acotada en $[x_i, x_{i+1}]$, digamos por su ínfimo $m_i(f)$ y su supremo $M_i(f)$ en el subintervalo, esto es
$$0 < c \le m_i(f) \le f(x) \le M_i(f), \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$
de donde
$$0 < \frac{1}{M_i(f)} \le \frac{1}{f(x)} \le \frac{1}{m_i(f)}, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$
esto es, $\frac{1}{f}$ es también acotada en el subintervalo.

Nota: si no se tuviera $f \geq c > 0$, lo valores de f podrıan acercarse arbitrariamente a cero en cuyo caso $1/f$ sería no acotada.
Usando la definición de ínfimo y supremo, tenemos entonces

$$m_i\left(\frac{1}{f}\right) \geq \frac{1}{M_i(f)} \qquad M_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m_i(f)}.$$

Con esto tenemos que

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right) - m_i\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{m_i(f)} - \frac{1}{M_i(f)} = \frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)}$$

pero

$$0 < c \leq m_i(f) \leq M_i(f)$$

y entonces

$$\frac{1}{m_i(f)M_i(f)} \leq \frac{1}{c^2}.$$

Con esto, la diferencia de las sumas superior e inferior queda acotada por

$$S\left(\frac{1}{f}\right) - s\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{c^2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(M_i\left(f\right) - m_i\left(f\right)\right)\left(x_{i+1} - x_i\right) = \frac{1}{c^2}(S(f) - s(f)).$$

ii) Sea $\varepsilon > 0$, de la condición de Riemann, sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que, si el diámetro de nuestra partición es menor que δ entonces

$$S(f) - s(f) < c^2\varepsilon$$

entonces

$$S\left(\frac{1}{f}\right) - s\left(\frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{c^2}c^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Esto es, $1/f$ también cumple la condición de Riemann, por lo que es integrable.

Puntaje:

(ai)	**[0.4 pto]**	Justificar continuidad de F usando TFC
	[0.4 pto]	Cota $F(0) < 0$
	[0.4 pto]	Cota $F(1) > 0$
	[0.3 pto]	Uso del TVI
(aii)	**[0.4 pto]**	Justificar derivabilidad de F usando TFC
	[0.4 pto]	Cálculo de F'
	[0.3 pto]	Signo de F'
	[0.1 pto]	Deducción de la monotonía estricta
	[0.3 pto]	Argumento para deducir que el cero es único
	[-0.2 pto]	Argumento solo formal
(bi)	**[0.5 pto]**	Correcta escritura de la diferencia de sumas
	[0.3 pto]	Cotas para $1/f$
	[0.2 pto]	Cotas para $M_i(1/f)$ y $m_i(1/f)$
	[0.2 pto]	Cota c^2 para $M_i(f)m_i(f)$
	[0.3 pto]	Conclusión identificando $S(f) - s(f)$
(bii)	**[0.5 pto]**	Uso de la Condición de Riemann para f
	[1.0 pto]	Uso de la desigualdad y conclusión