Universidad de Chile
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Depto. Ing. Matemática

Control 5, MA12A, Primavera 1996

Pregunta 1 Considere la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x} e^{\frac{1}{x}}$. Para f

1. **2.0 ptos.** Encuentre dominio, ceros y asíntotas de todo tipo. Analice su continuidad, estudie los límites laterales en 0 y encuentre su recorrido.

   Las funciones $\frac{1}{4x}, e^{\frac{1}{x}}$ y $(2x-1)^2$ son continuas y derivables de todo orden en $I\!R \setminus \{0\}$. El dominio de f es $I\!R \setminus \{0\}$ **0.25 ptos.**

   Posee un único cero $x = \frac{1}{2}$ **0.25 ptos.**

   Para estudiar la existencia de asíntotas debemos calcular los límites $\frac{f(x)}{x}$ cuando $x \to \pm\infty$. Como, cuando $x \to \pm\infty$, $e^{\frac{1}{x}}$ converge a cero y $\frac{(2x-1)^2}{4x^2}$ a 1 existe una asíntota de pendiente $m = 1$. Además, $f(x) - x$ converge a 0 cuando $x \to \pm\infty$. Así, la asíntota pasa por el origen **0.5 ptos.**

   En torno a 0 la función se comporta como sigue. $f(x)$ diverge a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$ pues $(2x-1)^2 e^{\frac{1}{x}}$ diverge a $+\infty$, y $f(x)$ converge a 0 cuando $x \to 0^-$ pues $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$ converge a 0 **0.5 ptos.** ($x = 0$ es una asíntota horizontal).

   De todo lo anterior podemos concluir que el recorrido de f es $I\!R$ **0.5 ptos.**

2. **2.0 ptos.** Calcule f'. Estudie el crecimiento de f y encuentre los máximos y mínimos locales y globales (en el caso de existir).

   $f'(x) = \frac{(4x(2x-1)-(2x-1)^2)}{4x^2} e^{\frac{1}{x}} - \frac{f(x)}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} \frac{(2x-1)}{4x^3}(4x^2 - (2x-1)x - (2x-1)) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(2x-1)}{4x^3}(2x^2 - x + 1)$ **0.5 ptos.**

   Como $2x^2 - x + 1 > 0$, para todo $x \in I\!R$, el único punto crítico es $x = \frac{1}{2}$ **0.5 ptos.**

   Además, los cambios de signo de f' y el crecimiento de f se relacionan en la tabla siguiente

$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

   0.5 ptos.

   Por lo tanto $x = \frac{1}{2}$ es un mínimo local, y no existe otro extremo **0.5 ptos.**

3. **1.0 pto.** Calcule f''. Estudie la convexidad de f y encuentre los puntos de inflexión.

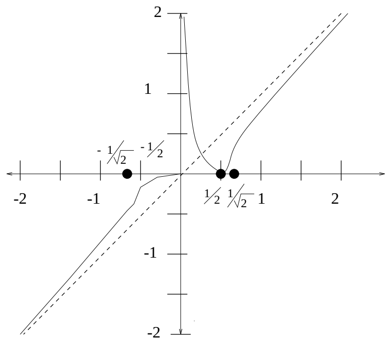
   $f'(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{4x^3} \frac{(2x-1)}{4x^3}(2x^2 - x + 1) = e^{\frac{1}{x}}(4x^3 - 2x^2 + 2x - 2x^2 + x - 1) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{4x^2} - \frac{1}{4x^3})$.

   De modo que $f''(x) = e^{\frac{1}{x}}(\frac{4}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{3}{x^4} - \frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4} + \frac{1}{x^5})$ **0.5 ptos.**

   $f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^5}(1 - 2x^2)$. De modo que los puntos de inflexión son $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ **0.5 ptos.** Notar que $f''(\frac{1}{2}) > 0$ es la condición suficiente de mínimo local.

4. **1.0 pto.**Con toda la información anterior grafique f.

   Resumiendo la información obtenemos



$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$f''(x)$	+	-	+	+	-
$f'(x)$	$+ \nearrow$	$+ \searrow$	$- \nearrow$	$+ \nearrow$	$+ \searrow$
$f(x)$	$- \nearrow$	$- \nearrow$	$+ \searrow$	$+ \nearrow$	$+ \nearrow$

Problema 2

1. **2.0 ptos.** Defina la función $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{sen(x)}$ en cero para que sea continua en el intervalo $]-\pi, \pi[$.

   f es continua en $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. El punto de interés es $x = 0$**0.5 ptos.**

   El límite de $f(x)$ cuando $x \to 0$ corresponde a $\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)-x}{xsen(x)}$. Las funciones $sen(x) - x$ y $xsen(x)$ son derivables en torno a 0 y $\lim_{x\to 0} sex(x) - x = \lim_{x\to 0} xsen(x) = 0$. Luego es posible aplicar la regla de l'hôpital y obtener $\lim_{x\to 0} \frac{sex(x)-x}{xsen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{sen(x)+xcos(x)}$**0.5 ptos.**

   Otra vez las funciones $cos(x) - 1$ y $sen(x) + xcos(x)$ son derivables en torno a 0 de modo que $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{sen(x)+xcos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen(x)}{2cos(x)-xsen(x)} = 0$ **0.5 ptos.**

   Así, para que f sea continua en $]-\pi, \pi[$, debemos definir $f(0) = 0$ **0.5 ptos.**

2. **2.0 ptos.** Utilice un desarrollo de Taylor de orden dos para aproximar $\sqrt{3}$, con al menos dos decimales significativos ($\sqrt{3} = 1.7320...$).

   El desarrollo de Taylor de orden dos para la función $\sqrt{x}$ en torno a x_0 es

   $T(x) = \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) - \frac{1}{2!4x_0\sqrt{x_0}}(x - x_0)^2$ **1.0 pto.**

   Escogiendo $x_0 = 4$ se obtiene: $T(x) = 2 + \frac{(x-4)}{4} - \frac{(x-4)^2}{64}$ **0.5 ptos.** Evaluando en $x = 3$ queda $T(3) = 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{111}{64} = 1.73...$ **0.5 ptos.**

3. **2.0 ptos.** Sea f continua en $[0, +\infty[$, derivable en $A =]0, +\infty[$ y tal que $f(0) = 0$ y $f'(x)$ es creciente en A. Utilice el Teorema del Valor Medio para probar que $\forall x \in A$, $f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}$. Concluya que la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente en A.

   Como f es derivable en A podemos aplicar el TVM con $b = x$ y $a = 0$. $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(u)$, con $u \in (0, x)$ **1.0 pto.**

   Sabemos que $f(0) = 0$ y que f' es creciente en A, por lo tanto $f'(u) \leq f'(x)$ y obtenemos $\frac{f(x)}{x} \leq f'(x)$ **0.5 ptos.**

   Para ver que $\frac{f(x)}{x}$ es creciente calculamos su derivada en A. Esto es posible pues f y x son derivables en A. La derivada es $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$. Aplicando lo anterior sabemos que la derivada es no negativa y por lo tanto la función $\frac{f(x)}{x}$ es creciente **0.5 ptos.**

Problema 3 Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

1. **2.0 ptos.** Explique porqué (a_n) está bien definida y muestre que es estrictamente creciente.

   El término a_n está bien definido pues la función q^x es continua en $\mathbb{R}$ y entonces Riemann integrable en $[0, n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$. **1.0 pto.**

   Para ver que es creciente calculamos la diferencia $b_n = a_{n+1} - a_n$. Aplicando la separabilidad en intervalos de la integral obtenemos

   $b_n = \int_0^{n+1} q^x dx - \int_0^n q^x dx = \int_n^{n+1} q^x dx$

   Como la función q^x es positiva y estrictamente decreciente b_n está acotado inferiormente por $(n + 1 - n)q^{n+1} > 0$ **1.0 pto.**

2. **2.0 ptos.** Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ...n\}$.

   Dado que la partición tiene paso 1, las sumas superior e inferior se escriben como $S = \sum_{i=1}^{n} q^{M_i} \quad s = \sum_{i=1}^{n} q^{m_i}$

   donde $q^{M_i} = max\{q^x : x \in [i-1, i]\}$ y $q^{m_i} = min\{q^x : x \in [i-1, i]\}$ **1.0 pto.**

   Como ya hemos dicho la función q^x es estrictamente decreciente y por lo tanto el valor máximo lo toma al principio de cada intervalo y el valor mínimo al final. Esto nos permite escribir S y s como $S = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ y $s = \sum_{i=1}^{n} q^i = q\frac{(1-q^n)}{1-q}$ **1.0 pto.**

3. **1.0 pto.** Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad q\frac{1-q^{n-1}}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}.$$

   Basta recordar que las sumas de Riemann satisfacen $s \leq \int_0^n q^x dx \leq S$, que $1 - q^n < 1$ y que $1 - q > 0$**1.0 pto.**

4. **1.0 pto.** Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

   Como la cota superior no depende de n la sucesión está acotada superiormente y además es creciente. Por lo tanto converge **0.5 ptos.**

   Debido a que la cota inferior es convergente a $\frac{q}{1-q}$ se concluye que el límite a debe ser mayor que $\frac{q}{1-q}$ **0.5 ptos.**