Control 5 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA N^{o}1

i) $I = \int \frac{dx}{e^{3x}\sqrt{1-e^{-2x}}}$ con la sustitución $u = e^{-x}$

$$du = -e^{-x}dx \Rightarrow dx = -\frac{du}{u}$$

se obtiene $I = -\int \frac{du/u}{u^{-3}\sqrt{1-u^2}} = -\int \frac{u^2 du}{\sqrt{1-u^2}}$ y con $u = \operatorname{sen} t$

se obtiene $I = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 t \cos t}{\cos t} dt = -\frac{1}{2}\int (1-\cos 2t)dt$

Entonces $I = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t + C$ (1.5 ptos.)

En la variable original $I = -\frac{1}{2}$ arcsen $u + \frac{1}{2}u\sqrt{1-u^2} + C$

Finalmente $I = -\frac{1}{2}$ arcsen $(e^{-x}) + \frac{1}{2}e^{-x}\sqrt{1+e^{-2x}} + C$ (0.5 ptos.)

ii) $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \, dx}{\operatorname{sen} x + \cos x + 1}$ Sustitución habitual $u = tg\left(\frac{x}{2}\right)$ con lo que

$\operatorname{sen} x = \frac{2u}{1+u^2}, \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$

Así $I = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{2du}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2} + \frac{1-u^2}{1+u^2} + 1} = 2\int \frac{udu}{(u+1)(u^2+1)}$ cuyo integrando debe separarse en fracciones parciales.

$$\frac{u}{(u+1)(u^2+1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{Bu+C}{u^2+1} \Rightarrow A + B = 0$$

$$B + C = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2} = -B = -C$$

$$A + C = 0$$

(0.5 ptos.)

Entonces $I = 2\int \left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{u+1} + \frac{1}{2}\,\frac{u+1}{u^2+1}\right] du = -\int \frac{du}{u+1} + \int \frac{udu}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

$$I = -ln(u+1) + \frac{1}{2} + ln(u^2+1) + \text{ arctg } u + C = ln\left(\frac{\sqrt{u^2+1}}{u+1}\right) + \text{ arctg } u + C$$

(1.0 pto.)

En la variable original $I = ln\frac{\sqrt{tg^2\left(\frac{x}{2}\right)+1}}{tg\left(\frac{x}{2}\right)+1} + \frac{x}{2} + C$ (0.5 ptos.)

iii) $I_n = \int (x+a)^n \sqrt{x+b}\; dx$ por partes $u = (x+a)^n \rightharpoonup du = n(x+a)^{n-1}$

$$dv = (x+b)^{1/2}dx \rightarrow v = \frac{2}{3}(x+b)^{3/2}$$

Así $I_n = \frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int (x+a)^{n-1}(x+b)^{3/2}dx$ conviene interpretar el término $(x+b)^{3/2}$ de la integral como

$$(x+b)^{3/2} = (x+b)(x+b)^{1/2} = (x+a+b-a)(x+b)^{1/2}$$ (1.0 pto.)

De modo que $I_n = \frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}\int \left[(x+a)^n\sqrt{x+b} + (b-a)(x+a)^{n-1}\sqrt{x+b}\right] dx$

Así $I_n = \frac{2}{3}(x+a)^n(x+b)^{3/2} - \frac{2n}{3}I_n - \frac{2n(b-a)}{3}I_{n-1}$, de donde

$I_n = \frac{2}{3+2n}(x+a)^n(x+b)^{3/2} - \frac{2n(b-a)}{3+2n}I_{n-1}$ (1.0 pto.)

Control 5 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA N^{o}2

a) ii) Para $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ es claro que

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = 1$$
$$\text{y} \qquad x_i = a + \frac{b-a}{n} i = 1 + i$$
$$x_{i-1} = i$$

(0.5 ptos.)

Como f es creciente $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_{i-1})\Delta x_i$ es decir $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(i)$ y
$S(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(i+1) = \sum\limits_{i=2}^{n} f(i)$
Se concluye que $s(f,P) \leq \int_1^n f(x)dx \leq S(f,P)$ queda como

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i)$$ (1.0 pto.)

ii) $f(x) = lnx$ es creciente en $[1, n]$ y
$s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} f(i) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} ln(i) = ln1 + ln2 + \ldots + ln(n-1) = ln[1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)] = ln[(n-1)!]$
y $S(f,P) = \sum\limits_{i=2}^{n} f(i) = \sum\limits_{i=2}^{n} ln(i) = ln2 + ln3 + \ldots + ln(n) = ln(2 \cdot 3 \ldots n) = ln(n!)$ (1.0 ptos.)
Además $\int_1^n ln(x)dx$ por partes $\int_1^n f(x)dx = x\ln x - x\big|_1^n = n\ ln\ n - n + 1$
$= ln(n^n e^{-n+1})$
Así $ln(n-1)! \leq ln(n^n e^{-n+1}) \leq ln\ n!$ y como $\ln x$ es creciente
Se concluye $(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n! \quad \forall n \geq 1$ (1.5 ptos.)

b)

i) $s_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{i=1}^{n} [i\sqrt{n^2 - i^2}]$ se puede escribir como

$$s_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} \left[ni\sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right]$$

Es inmediato identificar $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n} \Rightarrow b - a = 1$ y
$x_i = a + \frac{b-a}{n} i = a + \frac{i}{n} \equiv \frac{i}{n} \Rightarrow a = 0$ con lo cual $b = 1$
Además $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ (1.0 pto.)

ii) Con la identificación anterior $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\frac{i}{n}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}\frac{1}{n}\right] = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$ y
$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$ con la sustitución $1 - x^2 = u^2, xdx = -udu$
se obtiene $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = -\int_1^0 u^2 du = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}u^3\big|_0^1 = \frac{1}{3}$
Así: $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = 1/3$ (1.0 pto.)

Control 5 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA N^{o}3

a) i) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ para $\int_{-a}^{0} f(x)dx, x = -t, dx = -dt$
entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx$
pero f es impar, es decir $f(-t) = -f(t)$
Entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$ (1.0 pto.)

ii) $g(x) = \frac{1+x^3}{\cos^2 x}$ es continua en $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ y por lo tanto integrable (0.5 ptos.)
Integrando por partes $u = 1 + x^3 \to du = 3x^2dx$
$dv = \frac{1}{\cos^2 x}dx = sec^2xdx \to v = tg\, x$ (0.5 ptos.)
Entonces $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = (1 + x^3)tg\, x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} - 3\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2 tg\, x\, dx$
Pero $x^2\, tg\, x$ es función impar, entonces según (i) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} x^2\, tg\, x\, dx = 0$
Así $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1+x^3}{\cos^2 x}dx = (1 + x^3)tg\, x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left(1 + \frac{\pi^3}{64}\right) + \left(1 - \frac{\pi^3}{64}\right) = 2$ (1.0 pto.)

b)

i) $\lim \frac{e(x^2-\pi^2)+\pi\int_{x^2}^{\pi^2} \frac{e^{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}}{1+\cos x} \to$ Forma De L'Hopital $\frac{0}{0}$
Aplicanto De L'Hopital y T.F.C. en la integral queda

$$\lim_{x\to\bar{A}} \frac{2ex - \pi\frac{e^{sen\frac{x}{2}}}{x}2x}{-\operatorname{sen} x} \to \text{ Forma De L'Hopital } \frac{0}{0}$$

(0.5 ptos.)

$$= \lim_{x\to\pi} \frac{2e - 2\pi\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}e^{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}}{-\cos x} = \frac{2e}{-\cos\pi} = 2e.$$

(0.5 ptos.)

ii) Separando en integrales $F(x) = \int_{0}^{x}(u - x)f'(u)du = \int_{0}^{x} uf'(u)du - x\int_{0}^{x} f'(u)du$
Entonces $F'(x) = xf'(x) - \int_{0}^{x} f'(u)du - xf'(x) = -\int_{0}^{x} f'(u)du = -|f(u)|_{0}^{x}$

Aplicación Directa del T.F.C.

Así $F(x) = f(0) - f(x)$ (1.0 pto.)

iii) $\left|\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{1+x^2}dx\right| \le \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}|\operatorname{sen} x|}{1+x^2}dx$ en que $|\operatorname{sen} x| \le 1$ y $e^{-x} \le e^{-1}$ en $x\varepsilon[1, \sqrt{3}]$
Entonces $\left|\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen} x}{1+x^2}\right| \le \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}|\operatorname{sen} x|}{1+x^2}dx \le \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{e^{-1}dx}{1+x^2} = \frac{1}{e}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} =$
$= \frac{1}{e}|\text{ arctg } x\Big|_{1}^{\sqrt{3}} = \frac{1}{e}(\text{ arctg } \sqrt{3} - \text{ arctg } 1) = \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12e}$ (1.0 pto.)