Pauta Control #5 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-2

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/∼lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

a) Calcule las siguientes primitivas

i)
$$\int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = I$$

Descomponiendo el integrando

$$\frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Sigue que $A(x^2+1) + B(x^3-x^2+x-1) + (Cx+D)(x^2-2x+1) \equiv 4x^3-3x^2+3$ identificando

$$\left.\begin{array}{lll} 1)\text{ coef } x^3: & B+C=4 \\ 2)\text{ coef } x^2: & A-B-2C+D=-3 \\ 3)\text{ coef } x\ : & B+C-2D=0 \\ 4)\text{ c}^{\text{tes}}\ : & A-B+D=3 \end{array}\right\} 3-2C=-3 \Rightarrow \underline{C=3}$$

de (1) $\underline{B=4-C=1}$ de (3) $2D=B+C=4 \Rightarrow \underline{D=2}$ **(1.0 pto.)**
y de (4) $A=B-D+3=1-2+3=2 \Rightarrow \underline{A=2}$.
Así

$$I = \int \frac{4x^3-3x^2+3}{(x-1)^2(x^2+1)}dx = \int \frac{2}{(x-1)^2}dx + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x+2}{x^2+1}dx$$
$$= -\frac{2}{x-1} + ln|x-| + 3\int \frac{xdx}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1}$$

Entonces $I = -\frac{2}{x-1} + ln|x-1| + \frac{3}{2}ln(x^2+1) + 2 \text{ arctg } x + C$ **(1.0 pto.)**

ii) $I = \int e^{-x}ln(1+e^x)dx$
Por partes $u = ln(1+e^x) \to du = \frac{e^x}{1+e^x}dx$
$dv = e^{-x} \to v = -e^{-x}dx$
Entonces $I = uv - \int vdu = -e^{-x}ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x}$ **(0.5 ptos.)**
Para $I_1 = \int \frac{dx}{1+e^x}$ sustituimos $t = e^x$; $dt = e^x dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}$.
Así $I_1 = \int \frac{dt}{t(1+t)} = \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right] dt = ln\frac{t}{1+t} = ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)$.
Entonces $I = -e^{-x}ln(1+e^x) + ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C$ **(1.5 ptos)**

Nota Observar que en ambas primitivas hay formas alternativas de presentar el resultado, por ejemplo, agrupando o separando los términos logarítmicos.

b) Determine el valor de $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = I$

Por sustitución $x = 2\cos t \Rightarrow dx = -2 \operatorname{sen} t dt$.

Además si $x = 1 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pi/3$

y si $x = 2 \Rightarrow \cos t = 1 \Rightarrow t = 0$ **(0.5 ptos)**

Así $I = -\int_{\pi/3}^{0} \frac{2\operatorname{sen} t \cdot 2 \operatorname{sen} t}{4\cos^2 t} = \int_0^{\pi/3} tg^2 t dt$

Como $tg^2 t = \sec^2 t - 1 \Rightarrow I = \int_0^{\pi/3} (\sec^2 t - 1) dt = \int_0^{\pi/3} \sec^2 t dt - \int_0^{\pi/3} dt$

$\therefore I = tgt \Big|_0^{\pi/3} - t \Big|_0^{\pi/3} = tg \;\; \pi/3 - \pi/3$

$\therefore I = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$ **(1.5 ptos.)**

OBS.: También puede usar la sustitución $x = 2 \operatorname{sen} t$.

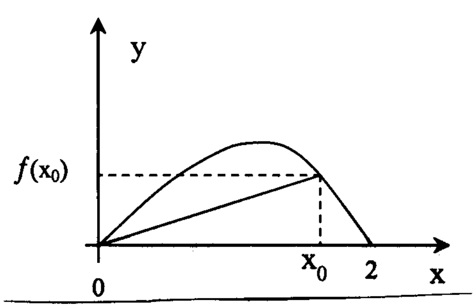
Problema 2

i) Encuentre una fórmula de recurrencia para la integral $I_n = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\cos(ax)dx$, $a \neq 0$, sabiendo que es de la forma $I_n = p_n\, I_{n-1} + q_n\, I_{n-2}$, $n \geq 2$, donde p_n y q_n son coeficientes dependientes de $n \in \mathbb{N}$.
Integrando por partes $u = (1-x^2)^n \to du = -2nx(1-x^2)^{n-1}$
$dv = \cos(ax)dx \to v = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)$
Así $I_n = uv\big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} vdu = \frac{1}{a}\operatorname{sen}(ax)\,(1-x^2)^n\big|_{-1}^{1} + \frac{2n}{a}\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^{n-1}\operatorname{sen}(ax)dx$
$\therefore I_n = \frac{2n}{a}\int_{-1}^{1} x(1-x^2)^{n-1}\operatorname{sen}(ax)dx$
Nuevamente por partes

$$u = x(1-x^2)^{n-1} \to du = [(1-x^2)^{n-1} - 2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}]dx$$
$$dv = \operatorname{sen}(ax)dx \to v = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$
$$\therefore I_n = -\frac{2n}{a^2}x(1-x^2)^{n-1}\cos(ax)\bigg|_{-1}^{1} + \frac{2n}{a^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1} - 2(n-1)x^2(1-x^2)^{n-2}\cos axdx$$
$$= \frac{2n}{a^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}\cos(ax)dx - \frac{4n(n-1)}{a^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-2}x^2\cos(ax)dx \qquad \textbf{(1.0 pto.)}$$
$$\therefore I_n = \frac{2n}{a^2}I_{n-1} + \frac{4n(n-1)}{a^2}\int_{-1}^{1}[(1-x^2)^{n-2}(-x^2+1-1)]\cos axdx$$
$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{a^2}I_{n-1} + \frac{4n(n-1)}{a^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-1}\cos(ax)dx - \frac{4n(n-1)}{a^2}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{n-2}\cos axdx$$
$$\Rightarrow I_n = \left[\frac{2n}{a^2} + \frac{4n(n-1)}{a^2}\right]I_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{a^2}I_{n-2}$$

Así $I_n = \frac{2n(2n-1)}{a^2}I_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{a^2}I_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$ **(2.0 ptos.)**
OBS.: Observar que hay formas algebraicas equivalentes de presentar el resultado correcto.

ii) Considere la función $f(x) = 2x - x^2$ y la región R definida por
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0;\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Se pide determinar sobre el gráfico de $f(x)$ el punto $P(x_0, f(x_0))$ de modo que la recta que une el origen con P divida el area de la región R en dos partes iguales



El area de la región R corresponde al area bajo la parábola $f(x) = 2x - x^2$ entre sus ceros, es decir
$A = \int_0^2 (2x - x^2)dx = \left|x^2 - \frac{1}{3}x^3\right|_0^2 = \frac{4}{3}$ **(0.5 ptos.)**

La recta por O y P será $y = mx$ en que $m = \frac{f(x_0)}{x_0}$.
Así $OP : y = \frac{f(x_0)}{x_0}x$ y el area entre $f(x)$ y la recta OP deberá ser $A/2$, es decir 2/3.
Entonces $\int_0^{x_0}(f(x) -\ \text{Recta}\ )dx = \int_0^{x_0}\left[2x - x^2 - \frac{f(x_0)}{x_0}x\right]dx = 2/3$.

$\Rightarrow \left[x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{f(x_0)}{x_0}\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - \frac{f(x_0)}{x_0}\frac{x_0^2}{2} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow x_0^2 - \frac{x_0^3}{3} - \frac{1}{2}x_0(\underbrace{2x_0 - x_0^2}_{f(x_0)}) = 2/3 \Rightarrow -\frac{x_0^3}{3} + \frac{x_0^3}{2} = 2/3$

Entonces $\frac{x_0^3}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_0^3 = 4 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{4}$.

Así $P(\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{16})$ **(1.0 pto.)**

iii) Calcule el límite

$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\operatorname{sen} t^2 dt}{\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)dt} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{[(x-1)\int_1^x \operatorname{sen} t^2 dt]'}{[\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)dt]'}$ **(0.5 ptos.)**

$= \lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x \operatorname{sen} t^2 dt + (x-1)\operatorname{sen} x^2}{3x^2\operatorname{sen}(x^6-1) - 2x\operatorname{sen}(x^4-1)} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{2\operatorname{sen} x^2 + 2x(x-1)\cos x^2}{\substack{6x\operatorname{sen}(x^6-1)+18x^2\cos(x^6-1) \\ -2\operatorname{sen}(x^4-1)-8x^4\cos(x^4-1)}}$

$= \frac{2\operatorname{sen} 1}{\underbrace{18-8}_{10}} = \frac{\operatorname{sen} 1}{5}$ **(1.0 pto.)**

Problema 3

i) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ en que $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$ y f es integrable sobre $[a,b]$. Demuestre que $f^2(x)$ es integrable sobre $[a,b]$.
Sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $x_0 = a, x_n = b$ una partición de $[a,b]$.
Entonces $S(f^2,P) - s(f^2,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i(f^2) - m_i(f^2))(x_i - x_{i-1})$ donde $M_i(f^2)$ y $m_i(f^2)$ son el supremo y el infimo de $f^2(x)$ en $[x_{i-1}, x_i]$ respectivamente.
$M_i(f^2)$ y $m_i(f^2)$ existen pués f es integrable y por lo tanto acotada en $[x_{i-1}, x_i]$ por $m_i(f)$ y $M_i(f)$, es decir

$$0 \leq m_i(f) \leq f(x) \leq m_i(f) \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

de donde $0 \leq m_i^2(f) \leq f^2(x) \leq M_i^2(f) \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$
de modo que f^2 es también acotada en $[x_{i-1}, x_i]$. **(1.0 pto.)**
Además, como $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i], M_i(f^2) = M_i^2(f) \wedge m_i(f^2) = m_i^2(f)$.
Entonces $M_i(f^2) - m_i(f^2) = M_i^2(f) - m_i^2(f) = (M_i(f) + m_i(f))(M_i(f) - m_i(f))$.
Pero $m_i(f) \leq M_i(f) \leq M$ en que $M = \text{ Sup } \{f(x)/x \in [a,b]\}$.
Así $M_i(f^2) - m_i(f^2) \leq 2M(M_i(f) - m_i(f))$.
Con esto $S(f^2,P) - s(f^2,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i(f^2) - m_i(f^2))(x_i - x_{i-1})$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} 2M(M_i(f) - m_i(f))(x_i - x_{i-1}) = 2M(S(f,P) - s(f,P)).$$

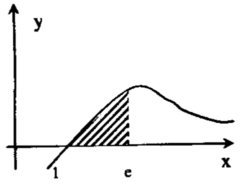
Como f es integrable, se sabe que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in P_{[a,b]}$ tal que

$$S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

Así $S(f^2,P) - s(f^2,P) \leq 2M(S(f,P) - s(f,P)) < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$.
Esto es, $f^2(x)$ cumple con la condición de Riemann y por lo tanto es integrable en $[a,b]$.
(1.0 pto.)

ii) Dada la función $f(x) = \frac{ln(x)}{x}$ se pide calcular el area del primer cuadrante encerrada por la curva y el eje OX, entre las abscisas de su cero y su máximo.
$f(x) = \frac{lnx}{x}$ tiene su único cero en $x = 1$.
Además $f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2} = 0$ si $x = e$ que corresponde a su punto de máximo absoluto (f crece si $x < e$ y decrece si $x > e$) **(0.5 ptos.)**

Entonces el area pedida es:



$$A = \int_1^e f(x)dx = \int_1^e \frac{lnx}{x}dx \begin{pmatrix} \text{Sustitución} \\ u = lnx \\ du = \frac{dx}{x} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(lnx)^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}$$ **(1.5 ptos.)**

iii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable con derivada continua en $\mathbb{R}$.
Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ son tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\int_a^b f^2(x)dx = 1$ demuestre que $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -1/2$.

Integrando por partes $\int_a^b xf(x)f'(x)dx$ se tiene

$$u = xf(x) \to du = (f(x) + xf'(x))dx$$
$$dv = f'(x)dx \to v = f(x)$$

Así $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = xf^2(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)(f(x) + xf'(x))dx$ **(1.0 pto.)**
El término libre es nulo pués $f(a) = f(b) = 0$.
Entonces $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\int_a^b f^2(x)dx - \int_a^b xf(x)f'(x)dx$.
Agrupando $2\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\int_a^b f^2(x)dx = -1$.
Así $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$ **(1.0 pto.)**