Pauta Control 5, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (21 de Octubre)

Solución P1. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} q^{\left[\frac{\ln x}{\ln q}\right]} & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

donde $0 < q < 1$ es una constante fija.
Obs: El paréntesis cuadrado denota a la función parte entera.

Para calcular la integral $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ realice lo siguiente:

a) Cuando $x \in (q,1)$ se tiene que

$$\ln q < \ln x < 0$$

por lo tanto (como $\ln q < 0$), al dividir por $\ln q$ se obtiene

$$1 > \frac{\ln x}{\ln q} > 0$$

y así

$$\left[\frac{\ln x}{\ln q}\right] = 0$$

por esta razón, $f(x) = q^0 = 1$ en este intervalo.

Si $x \in (q^n, q^{n-1})$, donde $n \in \mathbb{N}^*$, entonces

$$n \ln q < \ln x < (n-1)\ln q$$

y dividiendo por $\ln q$ se obtiene

$$n > \frac{\ln x}{\ln q} > n-1.$$

De este modo

$$\left[\frac{\ln x}{\ln q}\right] = n-1$$

por esta razón, $f(x) = q^{(n-1)}$ en este intervalo.

Gráfico aproximado de f

b) Dado $n \in \mathbb{N}^*$ la integral $A_n = \displaystyle\int_0^{q^n} f(x)dx$ se acota considerando que f es mayorada por 1 del modo siguiente:

$$A_n = \int_0^{q^n} f(x)dx \le \int_0^{q^n} 1dx = q^n$$

De este modo se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = 0$

c) Dado $n \in \mathbb{N}^*$, para calcular la integral $\displaystyle\int_{q^n}^1 f(x)$ la descomponemos en suma de integrales en los intervalos $(q^n, q^{n-1}), \ldots, (q,1)$ del modo siguiente:

$$\int_{q^n}^1 f = \int_{q^n}^{q^{n-1}} f + \int_{q^{n-1}}^{q^{n-2}} f + \cdots + \int_q^1 f$$

Para el cálculo de cada integral usamos la parte (a). De este modo

$$\begin{aligned}\int_{q^n}^{1} f &= q^{n-1}(q^{n-1}-q^n)+q^{n-2}(q^{n-2}-q^{n-1})+\cdots+(1-q)\\ &= (q^2)^{n-1}(1-q)+(q^2)^{n-2}(1-q)+\cdots+(1-q)\end{aligned}$$

Esta es una suma geométrica de n términos, razón q^2 y que comienza en $(1-q)$ por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_{q^n}^{1} f &= (1-q)\cdot\frac{1-q^{2n}}{1-q^2}\\ &= \frac{1-q^{2n}}{1+q}.\end{aligned}$$

d) Para calcular $\int_0^1 f(x)dx$, usamos los resultados anteriores del modo siguiente:

Dado $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \int_0^{q^n} f(x)dx+\int_{q^n}^{1} f(x)dx\\ &= A_n+\frac{1-q^{2n}}{1+q}\end{aligned}$$

Comoe ste resultado es válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$, podemos tomar el límite cuando $n \to \infty$ de este modo se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\left(A_n+\frac{1-q^{2n}}{1+q}\right)\\ &= 0+\frac{1}{1+q}\end{aligned}$$

Solución P2.

a) Para calcular la integral

$$J=\int_{-2a}^{2a} x\sqrt{4a^2-x^2}dx-\int_0^{2a} x\sqrt{a^2-(x-a)^2}dx$$

comenzamos por notar que la primera integral es cero ya que la función a integrar es impar sobre un dominio simétrico respecto al origen.

La segunda integral se puede encontrar inmediatamente si se interpreta como el momento respecto al eje OY del semicírculo de radio a centrado en $(a,0)$. Este momento vale $a\cdot A$ es decir $\frac{\pi}{2}a^3$.

Alternativamente, la segunda integral se calcula usando el cambio de variable clásico:

$$x-a=a\operatorname{sen}\varphi, \qquad \text{con } \varphi\in[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}].$$

(Obs: $dx=a\cos\varphi\,d\varphi$)

De este modo se tiene que

$$\begin{aligned}
J &= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(a+a\operatorname{sen}\varphi)a\cos\varphi\cdot a\cos\varphi\,d\varphi\\
&= -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2\varphi\,d\varphi-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2\varphi\cdot\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\\
&= -\frac{\pi}{2}a^3+0.
\end{aligned}$$

b) Para calcular la integral

$$I=\int\frac{\operatorname{sen}x}{4-\cos^2 x}dx$$

hacemos el cambio de variables $u=\cos x$, ya que así $du=-\operatorname{sen}x dx$ corresponde al numerador en la integral.

Con este cambio de variable queda:

$$\begin{aligned}
I &= -\int\frac{1}{4-u^2}du\\
&= -\int\frac{1}{(2-u)(2+u)}du
\end{aligned}$$

Aquí separamos la expresión en fracciones parciales e integramos, para obtener

$$\begin{aligned}
I &= -\int\frac{\frac14}{2-u}+\frac{\frac14}{2+u}du\\
&= -\frac14\left(-\ln|2-u|+\ln|2+u|\right)+C\\
&= \frac14\ln\left|\frac{2-u}{2+u}\right|+C
\end{aligned}$$

c) Consideremos la integral $I_{m,n}=\displaystyle\int_0^1 x^n(1+x)^m dx.$

Comenzamos por integrar por partes del modo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
u=x^n & \rightarrow\ du=nx^{n-1}dx\\
dv=(1+x)^m dx & \rightarrow\ v=\frac{(1+x)^{m+1}}{m+1}
\end{array}$$

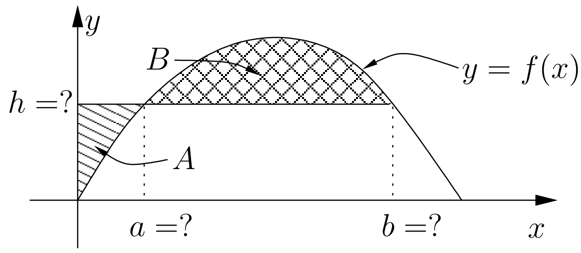
Así se obtiene que

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \left.\frac{x^n(1+x)^{m+1}}{m+1}\right|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^{n-1}(1+x)^{m+1}\\
&= \frac{2^{m+1}}{m+1}-\frac{n}{m+1}I_{m+1,n-1}
\end{aligned}$$

De aquí, despejando se obtiene la fórmula de recurrencia pedida.

Solución P3.

a) Dada $f(x) = 2x - 3x^3$, y la recta horizontal $y = h$.



Las áreas A y B de la figura se calculan del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^a (h - f(x))dx \\
B &= \int_a^b (f(x) - h)dx.
\end{aligned}
$$

De este modo, la ecuación $A = B$ se transforma en

$$\int_0^b h dx = \int_0^b f(x)dx$$

es decir

$$
\begin{aligned}
hb &= \int_0^b (2x - 3x^3)dx \\
&= b^2 - \frac{3}{4}b^4.
\end{aligned}
$$

Pero $h = 2b - 3b^3$ por lo tanto la ecuación en b es

$$b^2(1 - \frac{9}{4}b^2) = 0$$

cuyas soluciones, mayores o iguales a cero, son $b = 0$ y $b = \frac{2}{3}$.

Por lo tanto la solución no trivial es $h = \frac{4}{9}$.

b) La superficie del manto del paraboloide engendrado por la rotación de la parábola $y = \sqrt{x}$ en torno al eje OX entre $x = 0$ y $x = 2$ se calcula del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
S &= 2\pi \int_0^2 y\sqrt{1 + y'^2}dx \\
&= 2\pi \int_0^2 \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}dx \\
&= \pi \int_0^2 \sqrt{4x + 1}dx \\
&= \pi \frac{(4x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 4}\Bigg|_0^2 \\
&= \frac{\pi}{6}(27 - 1) = \frac{13}{3}\pi
\end{aligned}
$$

c) Para determinar qué función f continua, tal que $f(x) > 0$ para $x > 0$, satisface la propiedad siguiente: $\forall x \in [0, \infty)$ se define $R_x = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq x,\ 0 \leq y \leq f(t)\}$ y al hacer rotar esta región en torno a los ejes OX y OY los volúmenes de los sólidos de revolución V_{OX} y V_{OY} así obtenidos son iguales, se impone lo siguiente:

$$\pi \int_0^x f(t)^2 dt = 2\pi \int_0^x t f(t)dt, \qquad \forall x > 0.$$

Por lo tanto, derivando se obtiene que

$$\pi f(x)^2 = 2\pi x f(x) dt, \qquad \forall x > 0.$$

Es decir

$$(f(x) - 2x) f(x) = 0, \qquad \forall x > 0.$$

Como se buscan soluciones no nulas, deducimos que $f(x) = 2x$ es la función buscada.