Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 16 de Noviembre del 2000.

CONTROL 6

MA12A CALCULO 2000

Problema 1. Sea f la función definida en $(-1,+\infty)$ por $f(x)=\frac{x}{(1+x)^3}$. Para los volúmenes y áreas siguientes, se pide determinar si son finitos y en tal caso calcularlos.

a) (1.5 pts.) Área de la región $R=\{(x,y):0\le x, 0\le y\le f(x)\}$.
Hay que estudiar la convergencia de la integral impropia de primera especie $I=\int_0^\infty \frac{x}{(1+x)^3}dx$.
Mediante el cambio de variables $t=1+x$, nos queda

$$I=\int_1^\infty \frac{t-1}{t^3}dt=\int_1^\infty \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}dt=\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right]_1^\infty=\frac{1}{2}$$

b) (1.5 pts.) Área de la región $Q=\{(x,y):-1<x\le 0, f(x)\le y\le 0\}$.
Hay que estudiar la convergencia de la integral impropia de segunda especie $I=\int_{-1}^0 \frac{|x|}{(1+x)^3}dx$.
Mediante el cambio de variables $t=1+x$, nos queda

$$I=-\int_0^1 \frac{t-1}{t^3}dt=-\int_0^1 \frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}dt=-\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right]_0^1$$

Para analizar la convergencia debemos estudiar la existencia del siguiente límite$l=\lim_{x\to 0}\frac{1-2x}{2x^2}$.
Como $1-2x\to 1>0$ y $2x^2\to 0$ tenemos que $l=+\infty$. Luego el área no existe.
También es posible utilizar un criterio de comparación con $\frac{1}{t^2}$.

c) (1.5 pts.) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OX.
Hay que estudiar la convergencia de la integral impropia de primera especie $I=\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^6}dx$.
Mediante el cambio de variables $t=1+x$, nos queda

$$I=\pi\int_1^\infty \frac{(t-1)^2}{t^6}dt=\pi\int_1^\infty \frac{1}{t^4}-\frac{2}{t^5}+\frac{1}{t^6}dt=\pi\left(-\frac{1}{3t^3}+\frac{2}{4t^4}-\frac{1}{5t^5}\right]_1^\infty=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{30}$$

d) (1.5 pts.) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OY.
Hay que estudiar la convergencia de la integral impropia de primera especie $I=2\pi\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x)^3}dx$.
Mediante el cambio de variables $t=1+x$, nos queda

$$I=2\pi\int_1^\infty \frac{(t-1)^2}{t^3}dt=2\pi\int_1^\infty \frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^3}dt=2\pi\left(\ln|t|+\frac{2}{t}-\frac{1}{2t^2}\right]_1^\infty=+\infty$$

de modo que el volumen no existe.
También es posible utilizar un criterio de comparación con $\frac{1}{t}$.

Problema 2. Sea (f_n) la sucesión de funciones definida en el intervalo $[0,2]$ por $f_n(x) = (1+x^n)^{\frac{1}{n}}$ y $f(x) = \max\{1,x\}$.

a) (1.0 pto.) Demostrar que $\forall x \in [0,2]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ se tiene que $1 \leq \dfrac{f_n(x)}{f(x)} \leq 2^{\frac{1}{n}}$

Se tiene que $(\max\{1,x\})^n \leq 1 + x^n \leq 2(\max\{1,x\})^n$. Entonces $f(x) \leq f_n(x) \leq 2^{\frac{1}{n}} f(x)$. Como $f(x) \geq 1$ se concluye.

b) (1.0 pto.) Demostrar que la sucesión (f_n) converge puntualmente a f en el intervalo $[0,2]$.

Para $x \in [0,2]$ se tiene que $1 \leq \frac{f_n(x)}{f(x)} \leq 2^{\frac{1}{n}}$. Por teorema del Sandwich se concluye que $\frac{f_n(x)}{f(x)} \to 1$. Entonces, $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

b) (2.0 pts.) Demostrar que la sucesión (f_n) converge uniformemente a f en el intervalo $[0,2]$.

De la desigualdad $1 \leq \frac{f_n(x)}{f(x)} \leq 2^{\frac{1}{n}}$tenemos que $f(x) \leq f_n(x) \leq f(x) 2^{\frac{1}{n}}$. Luego, $0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f(x)\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$. Como $f(x) \leq 2$ para todo $x \in [0,2]$ se obtiene que $||f_n - f||_\infty = \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$. Como $2^{\frac{1}{n}} - 1 \to 0$ concluimos que $||f_n - f||_\infty \to 0$ y entonces (f_n) converge uniformemente a f.

d) (2.0 pts.) Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 (1+x^n)^{\frac{1}{n}}\, dx = \frac{5}{2}$.

La funciones f_n y f son continuas y por ende integrables en $[0,2]$, de modo que podemos aplicar el teorema de convergencia uniforme para las integrales y obtener que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 (1+x^n)^{\frac{1}{n}}\, dx = \int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 1 + \int_1^2 x = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$.

Problema 3.

a) (2.0 pts.) Analizar la convergencia de las series $\sum_{k\geq 2}\dfrac{(-1)^k}{k\ln(k)}$ y $\sum_{k\geq 2}\dfrac{1}{k\ln(k)}$.

La sucesión $\frac{1}{n\ln(n)}$ es decreciente a cero (luego positiva) pues $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{\ln(n)}$lo son. Entonces el criterio de Leibnitz garantiza que la primera serie converge. Además, dado el decrecimiento de la sucesión sabemos que la serie $\sum_{k\geq 2}\frac{1}{k\ln(k)}$ converge si y sólo si la integral impropia $\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln(x)}$converge. La función $\frac{1}{x\ln(x)}$ tiene como primitiva a $\ln(\ln(x))$ de modo que la integral impropia no converge y por ende tampoco lo hace la serie.

b) (1.0 pto.) Calcular el radio e intervalo de convergencia de la serie $\sum_{k\geq 2}\dfrac{x^k}{k\ln(k)}$.

Podemos aplicar cualquiera de los criterios para encontrar el radio de convergencia. Usamos aquí el criterio de la raíz n-ésima: se tiene que $\frac{1}{n^2}\leq\frac{1}{n\ln(n)}\leq\frac{1}{n}$entonces $\left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)^{\frac{1}{n}}\to 1$ y el radio de convergencia es 1. Por la parte anterior sabemos que el intervalo es $[-1,1)$.

c) c.i) (1.0 pto.) Calcular el radio de convergencia R de la serie $f(x)=\sum_{k\geq 1}\dfrac{x^k}{k(k+1)}$.

Aplicando alguno de los criterios se prueba que $R=1$, por ejemplo, $\lim\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$.

c.ii) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)$ se tiene que $(xf(x))''=\dfrac{1}{1-x}$.

En $(-1,1)$ la serie es absolutamente convergente e infinitamente derivable, de modo que $(xf(x))'=\left(\sum_{k\geq 1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}\right)'=\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ y $(xf(x))''=\left(\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}\right)'=\sum_{k\geq 1}x^{k-1}=\sum_{k\geq 0}x^k=\frac{1}{1-x}$.

c.iii) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $x\in(-R,R)\backslash\{0\}$ se tiene $f(x)=\dfrac{1+(1-x)(\ln(1-x)-1)}{x}$

Podemos proceder de varias formas. Una de ellas es integrar dos veces la expresión de la parte anterior y despejar $f(x)$. La otra es tomar el lado derecho, escribir el desarrollo en serie de $\ln(1-x)$ que es $-\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ y probar la igualdad de las dos series.

En la primera forma $(xf(x))'=-\ln(1-x)+C$. Como $(xf(x))'=f(x)+xf'(x)$ al evaluar en cero se tiene que $C=0$.

Integrando una vez más, se tiene que $xf(x)=(1-x)\ln(1-x)-(1-x)+D$.

Como para $x=0$ el lado izquierdo es cero tenemos que $D=1$.

De la segunda forma tenemos que la serie para $\ln(1-x)$ es $-\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ que tiene radio de convergencia 1. Entonces $(1-x)\sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}=\sum_{k\geq 1}\left(\frac{x^k}{k}-\frac{x^{k+1}}{k}\right)=\sum_{k\geq 1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}+x$.

Tales operaciones son lícitas pues tanto $\sum\frac{x^k}{k}$ como $\sum\frac{x^{k+1}}{k}$ tienen radios de convergencia iguales a 1. Entonces, $1+(1-x)(\ln(1-x)-1)=\sum_{k\geq 1}\frac{x^{k+1}}{k(k+1)}$. Para $x\neq 0$ se obtiene lo deseado.