Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 22 de Noviembre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 6

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Dado $n \geq 1$, se define la función $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f_n(x) = \frac{n+1}{n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}}.$$

(a) (1.5 pts.) Pruebe que $f_n(x) = \frac{1}{x^{1+1/n}}$.

(b) (1.5 pts.) Encuentre el límite puntual $f(x)$ de la sucesión $(f_n(x))$.

(c) (3.0 pts.) Determine si (f_n) converge uniformemente.

<u>Sol.</u>:

(a) **(1.5 pts.)** Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} &= \lim_{s \to +\infty} \int_x^s \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \lim_{s \to +\infty} \left(\left. \frac{t^{-(2+1/n)+1}}{-(2+1/n)+1} \right|_{t=x}^{t=s} \right) \quad \textbf{(0.5 pto.)} \\
&= \lim_{s \to \infty} \left(\frac{s^{-(1+1/n)}}{-(1+1/n)} - \frac{x^{-(1+1/n)}}{-(1+1/n)} \right) \\
&= \lim_{s \to \infty} \left(\frac{x^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} - \frac{s^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} \right),
\end{aligned}$$

pero sabemos que para $\alpha > 0$ se tiene

$$\lim_{s \to +\infty} s^{-\alpha} = 0,$$

luego

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{s^{-(1+1/n)}}{1+1/n} = 0, \quad \textbf{(0.5 pto.)}$$

y por lo tanto

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \frac{x^{-(1+1/n)}}{(1+1/n)} = \left(\frac{n}{n+1} \right) \frac{1}{x^{1+1/n}}.$$

Luego

$$f_n(x) = \frac{(n+1)}{n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{2+1/n}} = \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{n}{n+1} \right) \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x^{1+1/n}}. \quad \textbf{(0.5 pto.)}$$

(b) **(1.5 pts.)** Notemos que

$$f_n(x) = \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^{1/n}},$$

y si $x \in [1, \infty)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1, \quad \textbf{(0.5 pto.)}$$

y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^{1+1/n}} = \frac{1}{x}, \ x \geq 1. \quad \textbf{(0.5 pto.)}$$

Luego $(f_n)_n$ converge puntualmente a $f(x) = 1/x$, $x \geq 1$. **(0.5 pto.)**.

(c) Debemos estudiar si

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[1,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad \textbf{(0.5 pto.)}$$

donde $f(x) = 1/x$ $(x \geq 1)$ es el límite puntual obtenido en la parte (b). Sea

$$g_n(x) = f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^{1+1/n}}.$$

Tenemos que $g_n(x) \geq 0$ si $x \geq 1$. Buscaremos el máximo de $g_n(x)$, para lo cual comenzamos por calcular su derivada

$$g_n'(x) = -\frac{1}{x^2} + (1 + 1/n)\frac{1}{x^{2+1/n}}. \quad \textbf{(0.3 pto.)}$$

Buscaremos x_n tal que $g_n'(x_n) = 0$, luego resolvemos

$$g_n'(x) = \frac{1}{x^2}\left[-1 + \frac{(1+1/n)}{x^{1/n}}\right] \quad = \quad 0,$$

pero

$$\begin{aligned} -1 + \frac{(1+1/n)}{x^{1/n}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^{1/n} = 1 + 1/n \\ &\Leftrightarrow \quad x = (1+1/n)^n \end{aligned}$$

como además

$$\left.\begin{array}{lcll} g_n'(x) & \geq & 0, & x \in [1, (1+1/n)^n] \\ g_n'(x) & \leq & 0, & x \in [(1+1/n)^n, +\infty) \end{array}\right\} \quad \textbf{(0.4 pto.)}$$

se tiene que el máximo se alcanza en $x_n = (1+1/n)^n$ **(0.3 pto.)**, luego

$$\begin{aligned} g_n(x_n) &= \frac{1}{x_n}\left(1 - \frac{1}{x_n^{1/n}}\right) \\ &= \frac{1}{(1+1/n)^n}\left(1 - \frac{1}{(1+1/n)}\right) \\ &= \frac{1}{(1+1/n)^n}\left[1 - \frac{1}{(\frac{n+1}{n})}\right] \\ &= \frac{1}{(1+1/n)}\left[1 - \frac{n}{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{(1+1/n)^n}\left[\frac{1}{n+1}\right]. \quad \textbf{(0.5 pto.)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|f_n - f\|_\infty &= \|g_n\|_\infty = \sup_{x\in[1,+\infty)} |g_n(x)| \\
&= g_n(x_n) = \frac{1}{(1+1/n)^n}\left[\frac{1}{n+1}\right],
\end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n}\left[\frac{1}{n+1}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{e}\cdot 0 = 0 \quad \textbf{(0.5 pto.)}
\end{aligned}$$

y en consecuencia $(f_n)_n$ converge uniformemente a f en $[1,+\infty)$ **(0.5 pto.)**.

Problema 2.

Sea (a_k) una sucesión tal que $\forall k \geq 0$, $a_k \geq 1$. Dado $n \in \mathbb{N}$, se define

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 a_1 \cdots a_n$$

(a) (2.0 pts.) Pruebe que si (P_n) converge a $P \in \mathbb{R}$ entonces $P \geq 1$ y $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 1$.

(b) (2.0 pts.) Pruebe que (P_n) converge ssi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \ln(a_k)$ converge.

(c) (2.0 pts.) Pruebe que (P_n) converge ssi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k - 1)$ converge.

Sol.:

(a) **(2.0 pts.)** Como $a_k \geq 1$ entonces $P_n = a_0 \ldots a_n \geq 1$ y en consecuencia $P = \lim\limits_n P_n \geq 1$ **(0.75 pto.)**. Por otra parte,

$$\forall n \geq 1, \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{a_0 \ldots a_n}{a_0 \ldots a_{n-1}} = a_n \Rightarrow \lim_n a_n = \lim_n \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{P}{P} = 1 \qquad \textbf{(1.25 pts.)}$$

(b) **(2.0 pts.)** Directamente se tiene que $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$ converge $\Leftrightarrow$ $\ln(\prod\limits_{k=0}^{n} a_k) = \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(a_k)$ converge, donde se ha usado la continuidad de ln (decir esto último tiene **0.25 pto.**).

(c) **(2.0 pts.)** Usando el criterio de comparación por razón:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(a_k)}{a_k - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{1} = 1 > 0$$

luego ambas series convergen o divergen simultánemente, de donde se deduce la equivalencia gracias a la parte (b).

Observación: también puede hacerse cada implicancia por separado (por comparación), en cuyo caso a cada implicancia se le asigna **(1.0 pto.)**.

Problema 3. Sea la serie $\sum a_n x^n$ donde $a_n = 2^n - (-1)^n$.

(a) (1.0 pto.) Demuestre que el radio de convergencia de la serie es $\frac{1}{2}$.

(b) (1.0 pto.) Analice la convergencia de esta serie en $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

(c) (1.0 pto.) Pruebe que $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\sum a_n x^n = \frac{3x}{1 - x - 2x^2}.$$

Ind.: Descomponga $\sum a_n x^n$ como una suma de dos series geométricas.

(d) (1.5 pts.) Por integración demuestre que $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = -\ln[(1+x)\sqrt{1-2x}].$$

(e) (1.5 pts.) Analice la convergencia de la serie $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ en $x = -\frac{1}{2}$ y $x = \frac{1}{2}$.

Sol.

(a) **(1.0 pto.)** Para determinar el radio de convergencia R podemos calcular $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ o, si existe, $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ o, si existe, $L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. El radio de convergencia es el recíproco de esta cantidad si ésta es positiva y vale infinito si ésta es cero.
También es posible argumentar que la serie dada es la resta de las series $\sum 2^n x^n$ y $\sum (-1)^n x^n$ y que por ende su radio de convergencia será el mínimo entre los radios de convergencia de éstas.
Si se utiliza la primera estrategia el calcular L asigna **(0.5 pto.)** y determinar R otro **(0.5 pto.)**. *Si se usa la segunda, determinar el radio de convergencia de cada una otorga* **(0.25 pto.)** *y determinar R* **(0.5 pto.)**.
El cálculo de $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ se hace como sigue: $2^{n-1} \leq |a_n| \leq 2^{n+1}$. Además, $\sqrt[n]{2^{n-1}}$ y $\sqrt[n]{2^{n+1}}$ convergen a 2. Entonces, $L = 2$.
En el cálculo de $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ tenemos que $\frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2^n-(-1)^n} = \frac{2-\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}}{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}$. Como $\frac{1}{2^n} \to 0$ tenemos que $L = 2$.
Para la segunda estratagia ver la argumentación del punto (c).

(b) **(1.0 pto.)** Para $x = \frac{1}{2}$ hay que estudiar la serie $\sum \frac{2^n-(-1)^n}{2^n}$. Ésta no converge pues su término general $1 - \frac{(-1)^n}{2^n} \to 1 \neq 0$ **(0.5 pto.)**.
Para $x = -\frac{1}{2}$ se obtiene la serie $\sum \frac{2^n-(-1)^n}{(-2)^n}$ que es igual a $\sum \left((-1)^n - \frac{1}{2^n}\right)$. Como 1 y -1 son puntos de acumulación de la sucesión $(-1)^n - \frac{1}{2^n}$ ésta no converge. Por esta razón la serie tampoco lo hace **(0.5 pto.)**.

(c) **(1.0 pto.)** Sabemos que la serie $\sum x^n$ tiene radio de convergencia 1 y que para todo $x \in (-1, 1)$ se tiene que $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$. Entonces, para $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se tiene que $\sum (2x)^n = \frac{1}{1-2x}$ y $\sum (-x)^n = \frac{1}{1+x}$ **(0.7 pto.)**. Con esto

$$\sum \left(2^n - (-1)^n\right) x^n = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+x} = \frac{3x}{1-x-2x^2} \quad (0.3 \textbf{ pts.})$$

(d) **(1.5 pts.)** Por teorema de convergencia uniforme sabemos que para todo $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ se tiene que

$$\int_0^x \left(\frac{1}{1-2t} - \frac{1}{1+t}\right) = \sum a_n \int_o^x t^n = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \ (\mathbf{0.7\ pto.})$$

Como $\int_0^x \frac{1}{1+bt} = \frac{1}{b}\ln(1+bx)$, para $b \neq 0$, se obtiene que $\sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} = -\frac{1}{2}\ln(1-2x) - \ln(1+x) = -\ln\left((1+x)\sqrt{1-2x}\right)$ **(0.8 pto.)**.

(e) **(1.5 pts.)** Sea $b_n = \frac{a_n}{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{n+1}$.

Para $x = \frac{1}{2}$ debemos estudiar la serie $\sum b_n \frac{1}{2^{n+1}}$. Podemos comparar por cuociente $b_n \frac{1}{2^{n+1}}$ con $\frac{1}{n+1}$ **(0.5 pto.)**. En este caso nos queda que $\frac{a_n}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}$. Como la serie armónica diverge concluimos que la serie $\sum b_n \frac{1}{2^{n+1}}$ también diverge **(0.5 pto.)**.

Otro argumento es el siguiente: la serie $\sum \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$ *es absolutamente convergente pues* $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)} \leq \frac{1}{2^n}$ *y* $\sum \frac{1}{2^n}$ *converge* **(0.5 pto.)**. *Veamos que la serie* $\sum b_n \frac{1}{2^{n+1}}$ *diverge. Si ésta converge entonces por álgebra de series la serie* $\sum b_n \frac{1}{2^{n+1}} + \sum \frac{(-1)^n}{(n+1)2^{n+1}}$ *también lo haría, es decir, tendríamos que la serie* $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ *converge, pero esto no puede ocurrir pues como* $\lim \frac{\frac{1}{2(n+1)}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{2} \neq 0$ *y la serie armónica* $\sum \frac{1}{n+1}$ *diverge, sabemos que* $\sum \frac{1}{2(n+1)}$ *también lo hace* **(0.5 pto.)**.

Para $x = -\frac{1}{2}$ se obtiene la serie $\sum b_n \frac{1}{(-2)^{n+1}} = \sum \left(\frac{(-1)^n}{2(n+1)} - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\right)$. Ya sabemos que $\sum \frac{1}{2^{n+1}(n+1)}$ converge. Además, $\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)$ decrece a cero. Entonces, el criterio de Leibnitz asegura que $\sum \frac{(-1)^n}{2(n+1)}$ es convergente y por álgebra de series concluimos que $\sum b_n \frac{1}{(-2)^{n+1}}$ converge **(0.5 pto.)**.