Pauta Control #6 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Año 2002

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.-

(i) (2 ptos.) Pruebe que las integrales $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$, $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ divergen.

(ii) (2 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$ converge y encuentre su valor.

(iii) (2 ptos.) Encuentre los valores de $\alpha > 0$ para lo cuales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}\, dx$ converge.

Ind. El comportamiento de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$ y $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ se considera conocido.

Pauta.-

(i) Las integrales que aparecen convergen si los límites siguientes existen:

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

y

$$\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Empecemos calculando las primitivas; haciendo el cambio de variables $u = \ln x$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \int \frac{du}{u^2} \\ &= -\frac{1}{u} + C \\ &= -\frac{1}{\ln x} + C.\end{aligned}$$

La segunda es

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x-1} + C.$$

Vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{a\to 1^+} \int_a^2 \frac{dx}{x(\ln x)^2} &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln x}\Big]_a^2 \\ &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln a}\end{aligned}$$

no existe por lo que la primera integral diverge. De modo similar

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1^+}\int_a^2 \frac{dx}{(x-1)^2} &= \lim_{a\to 1^+}\int_a^2 -\frac{1}{x-1}\Big]_a^2 \\
&= \lim_{a\to 1^+} -1+\frac{1}{a-1}
\end{aligned}$$

tampoco existe.

(ii) Por definición la integral impropia converge si

$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx, \qquad \lim_{R\to\infty}\int_2^R\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \qquad (*)$$

existen. En la primera parte de este problema ya calculamos la primitiva

$$\int\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = -\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}+C.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1^+}\int_a^2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx &= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\Big]_a^2 \\
&= \lim_{a\to 1^+} -\frac{1}{\ln 2}+1+\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{a-1}.
\end{aligned}$$

Concentrémonos en el límite

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 1^+}\frac{1}{\ln a}-\frac{1}{a-1} &= \lim_{a\to 1^+}\frac{a-1-\ln a}{(a-1)\ln a} \quad \text{usamos la regla de l'Hôpital} \\
&= \lim_{a\to 1^+}\frac{1-\frac{1}{a}}{\ln a+\frac{a-1}{a}} \\
&= \lim_{a\to 1^+}\frac{a-1}{a-1+a\ln a} \quad \text{y usando l'Hôpital nuevamente} \\
&= \lim_{a\to 1^+}\frac{1}{2+\ln a} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\lim_{a\to 1^+}\int_a^2\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = -\frac{1}{\ln 2}+\frac{3}{2}.$$

Ahora calculemos

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_2^R\left(\frac{1}{x(\ln x)^2}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx &= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{x-1}\Big]_2^R \\
&= \lim_{R\to\infty} -\frac{1}{\ln R}+\frac{1}{R-1}+\frac{1}{\ln 2}-1 \\
&= \frac{1}{\ln 2}-1.
\end{aligned}$$

Vemos que ambos límites en $(*)$ existen, por lo que la integral

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}\right) dx$$

converge y además su valor es

$$-\frac{1}{\ln 2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{\ln 2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

(iii) La función $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\alpha(1-x)}}$ es continua en en $(0{,}1]$ y tiene una asíntota vertical en 0 si $\alpha > 0$. Por lo tanto la integral en el enunciado es impropia. Para determinar si converge podemos utilizar el criterio de comparación por cuociente, con la función $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$. Para ello primero calculemos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}}{\frac{1}{x^\alpha}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{x^{\alpha(1-x)}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} x^x.
\end{aligned}$$

Este límite se puede encontrar calculando primero

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \ln x^x &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

por lo que vemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x^{\alpha(1-x)}}}{\frac{1}{x^\alpha}} = 1.$$

Como este límite existe y es positivo, el criterio de comparación nos garantiza que la integral del enunciado converge si y sólo si la integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

converge, lo cual ocurre si y sólo si $\alpha < 1$.

Asignación de puntaje P1

(i) (2 pts.)

- 0.5 formular correctamente la convergencia de las integrales impropias en términos de la existencia de los límites.
- 1 calcular correctamente las primitivas (0.5 c/u).
- 0.5 decir que los límites cuando $a \to 1^+$ no existen.

(ii) (2 pts.)

0.3 formular correctamente la convergencia de la integral impropia con límites, incluyendo la separación en dos integrales impropias.

0.3 por tener correcta la expresión de la primitiva

0.8 calcular correctamente el límite cuando $a \to 1^+$.

0.3 calcular correctamente el límite cuando $R \to \infty$.

0.3 encontrar el valor de la integral.

(iii) **(2 pts.)**

0.3 mencionar que el problema está en cero

0.3 encontrar una buena función de comparación

0.5 calcular correctamente el límite

0.3 mencionar que se tiene las hipótesis del teorema que se quiere usar

0.3 saber el comportamiento de $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

0.3 conclusión

NOTA: en algunas secciones se vio como teorema (o corolario) que si $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha f(x)$ existe y es positivo (y por simplificar, que f es continua excepto en 0) entonces $\int_0^b f(x)\,dx$ converge sólo si $\alpha < 1$. Si alguien quiere resolver el problema usando este criterio el puntaje es

0.5 mencionar que el problema está en cero

0.5 mencionar el criterio

0.5 calcular correctamente el límite

0.5 conclusión

P2.-

(i) **(a)** (1.5 ptos.) Demuestre que para todo número real p, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{pn}}{n!}$ converge .

(b) (1.5 ptos.) Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{10}{n}\right)^{n^2}}{n!}$.

(ii) Considere la función

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x), \quad x \geq 0.$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ de término $a_n = (-1)^n f(n)$ converge.

(b) (1.5 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,f(x)$ y utilice este resultado para demostrar que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ definida en **(ii)(a)** no converge absolutamente.

Pauta.-

(i) **(a)** En este ejercicio usamos el criterio del cuociente con $a_n = \dfrac{e^{np}}{n!}$ y $a_{n+1} = \dfrac{e^{(n+1)p}}{(n+1)!}$. De este modo

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^p}{n+1} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

Por lo tanto la serie $\sum a_n$ es una serie convergente.

(b) Aquí basta con usar comparación con una serie del tipo de las estudiadas en la parte **(a)**. En efecto, es bien sabido que

$$\left(1+\frac{10}{n}\right)^n \le e^{10},$$

por lo que el término n-ésimo de la serie en estudio es acotado superiormente por

$$\frac{e^{10n}}{n!},$$

y como esta sucesión genera una serie convergente (ya demostrado en la parte anterior), entonces la serie estudiada converge.

(ii) **(a)** Claramente $f(x)$ es decreciente y convergente a cero si $x \to +\infty$. Para ver el decrecimiento puede calcularse $f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$. La convergencia a cero viene directamente del hecho que $\tan(x) \to +\infty$ si $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. En efecto, haciendo el cambio de variables $x = \tan(y)$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right) &= \lim_{y\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(\tan(y))\right)\\
&= \frac{\pi}{2}-\lim_{y\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} y\\
&= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

En consecuencia, en virtud del criterio de Leibniz, se concluye que la serie $\sum_n(-1)^n f(n)$ es convergente.

(b) El límite pedido se calcula usando la regla de l'Hôpital. Efectivamente (el límite es de la forma $0/0$)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan(x)}{1/x}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Usando este cálculo, se concluye que la serie $\sum f(n)$ tiene el mismo comportamiento que la serie armónica $\sum \frac{1}{n}$. Como esta última es sabidamente divergente, la serie en estudio también lo es. Esto concluye la demostración de la convergencia condicional de la serie $\sum(-1)^n f(n)$.

Asignación de puntaje P2

(i)(a) (1.5 pts.)

0.5 identificar el criterio a utilizar correctamente

0.5 calcular correctamente el límite

0.5 conclusión

(i)(b) (1.5 pts.)

0.5 acotar correctamente el término n-ésimo

0.5 utilizar el criterio de comparación

0.5 usar la parte anterior y conclusión

(ii)(a) (1.5 pts.)

0.5 identificar y aplicar correctamente criterio de Leibniz

0.5 decrecimiento de f

0.5 convergencia a cero de f

(ii)(b) (1.5 pts.)

0.3 cálculo del límite pedido

0.3 comprensión del concepto de convergencia absoluta

0.5 identificar que, en vista del límite calculado, corresponde comparar con la serie armónica

0.4 saber que la serie armónica diverge y conclusión

NOTA: En la parte **(i)(a)** pueden utilizarse otros criterios.

1.- Si se usa el criterio de la raíz n-ésima, es necesario saber que la sucesión $\sqrt[n]{n!}$ es no acotada, lo cual es una propiedad no standard y difícil de demostrar. En este caso no se puede asignar puntaje por el límite, salvo que el alumno justifique este último límite!

2.- También se puede argumentar usando series de potencias y diciendo que la serie en cuestión corresponde al desarrollo en serie de potencias de la función e^x que converge para todo x real en particular en $x = e^p$, esto es la serie converge y vale e^{e^p}.

P3.- (i) (2 ptos.) Demuestre que $\forall a > 1$ la integral $\displaystyle\int_1^\infty a^{-x}\,dx$ converge .

(ii) (2 ptos.) Sea $f : [1, \infty) \to (0, \infty)$ una función continua tal que

$$\exists \lim_{x\to+\infty} (f(x))^{1/x} < 1.$$

Demuestre que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)\,dx$ converge. Concluya que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ es convergente.

Ind. Observe que si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) < 1$, entonces $\exists a > 1$ tal que $g(x) \leq \frac{1}{a}$ para x suficientemente grande.

(iii) (2 ptos.) **Usando** el criterio integral, analice la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. Verifique también que se cumplen todas las hipótesis necesarias para aplicar este criterio.

Pauta.- **(i)** Para calcular una primitiva de a^{-x} con $a > 1$, notemos que

$$a^{-x} = e^{-x\ln a}$$

de modo que queda fácilmente ($\ln a > 0$ si $a > 1$)

$$\int a^{-x}\,dx = \int e^{-x\ln a}\,dx = -\frac{1}{\ln a}e^{-x\ln a} + C = -\frac{1}{\ln a}a^{-x} + C.$$

La función $a^{-x} = e^{-x\ln a}$ es continua para $x \in [1, +\infty)$ (de hecho en $x = 1$ vale $1/a$) por lo que para que exista la integral impropia pedida, es necesario y suficiente que exista el límite

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x a^{-x}\,dx.$$

Este límite es

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{\ln a}e^{-x\ln a} + \frac{1}{a\ln a}\right) = \frac{1}{a\ln a}$$

pues $\ln a > 0$ si $a > 1$. Se concluye entonces que la integral converge.

(ii) Usando la indicación, existe un $M > 1$ (suficientemente grande) tal que

$$(f(x))^{1/x} \leq a^{-x}, \quad \forall x \in [M, +\infty)$$

de donde comparando se obtiene que

$$\int_M^\infty (f(x))^{1/x}\,dx \leq \int_M^\infty a^{-x}\,dx \leq \int_1^\infty a^{-x}\,dx < +\infty,$$

donde hemos usado que $a^{-x} = e^{-x\ln a} > 0$ para $x \in [1, M]$. Como f es no negativa se obtiene de lo anterior la convergencia de la integral

$$\int_M^\infty (f(x))^{1/x}\,dx.$$

Finalmente, como $f(x)^{1/x}$ es continua en $[1, M]$, es en consecuencia integrable en $[1, M]$ y entonces

$$\int_1^\infty (f(x))^{1/x}\,dx = \int_1^M (f(x))^{1/x}\,dx + \int_1^\infty (f(x))^{1/x}\,dx,$$

por lo que esta última converge. Se concluye que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ converge tomando $f(x) = \left(\frac{e}{x}\right)^x$. Esta función es claramente continua, positiva y se verifica que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{e}{x}\right)^x\right)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e}{x}\right) = 0 < 1.$$

(iii) Verifiquemos que la función $f(x) = (\ln x)^{-\ln x}$ es no negativa y decreciente (al menos para x grande). Es fácil ver que f es no negativa. Notando que

$$f(x) = (\ln x)^{-\ln x} = e^{-\ln x(\ln(\ln x))}$$

se obtiene

$$f'(x) = -\left(\ln x \ln(\ln x) + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln(\ln x)\right) e^{-\ln x(\ln(\ln x))}.$$

Notando que $\ln x > 1$ si $x > e$, se obtiene a su vez que $\ln(\ln x) > 0$ si $x > e$, de donde $f' < 0$ para $x > e$. La función es pues decreciente y no negativa para $x > e$ de donde aplicando el criterio integral, la convergencia de la serie pedida es equivalente a la convergencia de la integral impropia

$$\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\, dx,$$

pero haciendo el cambio de variables $y = \ln x$ se obtiene ($dx = e^y\, dy$)

$$\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\, dx = \int_1^\infty \frac{e^y}{y^y}\, dx = \int_1^\infty \left(\frac{e}{y}\right)^y\, dx,$$

que es convergente como se vio en la primera parte del problema. Se concluye que la serie es pues convergente.

Asignación de puntaje P3

(i) (2 pts.)

- 0.8 cálculo de la primitiva de a^{-x}
- 0.5 identificar la impropiedad de la integral en $+\infty$, incluyendo mención de la continuidad
- 0.5 calculo correcto del límite en $+\infty$
- 0.2 conclusión

(ii) (2 pts.)

- 0.5 usar la indicación y comparar integrales en $[M, \infty]$ usando que a^{-x} es no negativa
- 0.5 concluir que $\displaystyle\int_M^\infty f(x)^{1/x}\, dx$ converge usando que f es no negativa
- 0.5 usar que si $f^{1/x}$ es continua existe $\displaystyle\int_1^M f(x)^{1/x}\, dx$ y deducir que $\displaystyle\int_1^\infty f(x)^{1/x}\, dx$ converge
- 0.5 deducción de que $\displaystyle\int_1^\infty \left(\frac{e}{x}\right)^x dx$ converge (continuidad (0.1), positividad (0.1) y límite(0.3))

(iii) (2 pts.)

- 1 verificar que f es decreciente para $x > e$
- 0.5 equivalencia de la convergencia de la serie con la convergencia de $\int_e^\infty \frac{1}{(\ln x)^{\ln x}}\, dx$
- 0.5 cambio de variable y reducción al caso estudiado en **(i)**