Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Pauta Control 6, MA12A, Primavera 1996

Problema 1.

1. Calcule el valor de las siguientes integrales

   (a) **(2.0 pts.)** $I = \int_{-3}^{3} |2+x|dx$

   $I = \int_{-3}^{3} |2+x|dx = \int_{-3}^{-2} -(2+x)dx + \int_{-2}^{3}(2+x)dx = -(2x+\frac{x^2}{2})_{-3}^{-2} + (2x+\frac{x^2}{2})_{-2}^{3} =$ (1.0 pto.).

   $I = -(-4+2-(-6+\frac{9}{2})) + (6+\frac{9}{2}-(-4+2)) = -(4-\frac{9}{2}) + (8+\frac{9}{2}) = 4+9 = 13$ (1.0 pto.).

   (b) **(2.0 pts.)** $I = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{x^2-2x+1}dx$

   $I = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{x^2-2x+1}dx = \int_{-2}^{0} \frac{3x^2}{(x-1)^2}dx$, tomando $u = x-1$, $u' = 1$ nos queda

   $= \int_{-3}^{-1} 3\frac{(1+u)^2}{u^2}du = \int_{-3}^{-1} \frac{3u^2+6u+3}{u^2}du$

   $I = \int_{-3}^{-1}(3+\frac{6}{u}+\frac{3}{u^2})du = 3x|_{-3}^{-1} + 6\ln(|u|)|_{-3}^{-1} - \frac{3}{u}|_{-3}^{-1}$ (1.0 pto.).

   $I = -3-(-9)+6\ln(1)-6\ln(3)-3(-1-(-\frac{1}{3})) = 8-6\ln(3)$. (1.0 pto.).

2. **(2.0 pts.)** Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$ satisface la recurrencia:

$$(1+2n)I_n = (2x^n\ \sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}.$$

   $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$, tomando $v' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$, $u = 2x^n$ nos queda que $I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - \int \sqrt{1+x}2nx^{n-1}dx$ (1.0 pto.).

   que es igual a

   $= 2x^n\sqrt{1+x} - 2n\int \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1+x}}dx - 2n\int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$

   despejando I_n obtenemos

   $(1+2n)I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1}$ (1.0 pto.).

Problema 2.

1. (**2.0 pts.**) Determine el área del manto del sólido engendrado al rotar, en torno al eje y, el trozo de la curva $y = \frac{x^2}{2}$, comprendido entre 0 y 1.

   $A = 2\pi \int\limits_0^1 x\sqrt{1+(y')^2}dx$ (1.0 pto.).

   $2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}dx = \frac{2\pi}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1$ (0.5 pts.).

   $= \frac{2\pi}{3}((2)^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2}-1)$. (0.5 pts).

2. Considere la espiral de ecuación paramétrica $x(t) = e^{2t}cos(t), y(t) = e^{2t}sen(t)$.

   (a) (**2.0 pto.**) Encuentre el largo L, de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 hasta 2π.
   Calculemos $I = \int_0^u \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$ para $u \in [0, 2\pi]$.
   $x(t) = e^{2t}cos(t)$, $x'(t) = e^{2t}(2cos(t) - sen(t))$
   $y(t) = e^{2t}sent$, $y'(t) = e^{2t}(2sen(t) + cos(t))$.
   $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} =$
   $= \sqrt{e^{4t}(4cos^2(t) - 4cos(t)sen(t) + sen^2(t) + 4sen^2(t) + 4cos(t)sen(t) + cos^2(t))} =$
   $e^{2t}\sqrt{5}$.
   Por lo tanto,
   $\int\limits_0^u e^{2t}\sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{2u}$
   evaluando en $u = 2\pi$, queda $L = \frac{\sqrt{5}}{2}e^{4\pi}$

   (b) (**2.0 pto.**) Encuentre t_0 tal que, la longitud de la curva obtenida al variar el parámetro t, desde 0 a t_0, sea igual a la mitad del largo L, obtenido en la parte a).
   La condición para encontrar t_0 es $\frac{\sqrt{5}}{2}e^{2t_0} = \frac{L}{2}$. Entonces, $t_0 = 2\pi - \ln(\sqrt{2})$.

Problema 3.

1. Considere la función $g(x)$ definida por $g(x) = \int_0^x \frac{arctg(t)}{t} dt$, donde $\frac{arctg(t)}{t}$ se define en cero por continuidad.

   (a) (**1.5 pts.**) Demuestre que: $\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \int_0^1 arctg(t)dt$

   Tomando, $u = g(t)$, $u' = g'(t)$, $v' = 1$ y $v = t$ obtenemos $I = g(t)t|_0^1 - \int_0^1 g'(t)tdt$

   de modo que $I = g(1) - \int_0^1 arctg(t)dt$.

   (b) (**1.5 pts.**) Utilizando lo anterior, muestre que: $\int_0^1 g(x)dx = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}$

   Como $\int arctg(t)dt = arctg(t)t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ la integral nos queda
   $I = g(1) - (tarctg(t) - \frac{1}{2}\ln(1+t^2))_0^1 = g(1) - (arctg(1) - \frac{1}{2}\ln(2)) = g(1) - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln(2)$

2. Sea $g : IR \to IR$ una función biyectiva, diferenciable y tal que $g(0) = 0$. Sea $f : IR \to]-1, 1[$ una función diferenciable. Suponga que f y g satisfacen:

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x))dx + f(x)$$

   (a) (**2.0 pts.**) Pruebe que $f(x) = tgh(g(x))$.
   Derivando y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo obtenemos
   $g'(x) = g'(x)f^2(g^{-1}(g(x))) + f'(x)$
   de modo que $g'(x) = \frac{f'(x)}{1-f^2(x)}$
   el lado derecho es la derivada de $arctgh(f(t))$ entonces
   $g(x) = \int^x \frac{f'(t)}{1-f^2(t)}dt + C = (arctgh(f(x)) - arctgh(f(0))) + C$.
   Como $g(0) = 0$, $c = 0$. Además, de la relación entre f y g, se tiene que $f(0) = 0$.
   Así, $g(x) = arctgh(f(x))$ o $f(x) = tgh(g(x))$.

   (b) (**1.0 pts.**) Calcule la integral

$$\int_0^{x^3} (tgh(t))^2 dt$$

   La observaci'on es directa pues
   $f(g^{-1}(x)) = tgh(g(g^{-1}(x))) = tgh(x)$.
   Utilizando la relación integral entre f y g obtenemos,
   $\int_0^{x^3} tgh^2(t)dt = g(x) - f(x) = x^3 - tgh(x^3)$.
   Ind: Observe que $f(g^{-1}(x)) = tgh(x)$.