DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

PAUTA CONTROL6 MA12A–CALCULO

P1. Para $\alpha < 1$, sea R la región encerrada por la curva x^α , el eje OY y la recta tangente a x^α en el punto $x = 1$.

(i) Demostrar que el área $A(\alpha)$ de la región R está dada por $A(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$.

- **Sol**: La recta tangente a x^α en $x = 1$ está dada por $y = \alpha(x-1)+1$. De modo que el área se calcula como $A(\alpha) = \int_0^1(\alpha x+1-\alpha-x^\alpha)$. Integrando se obtiene $A(\alpha) = \frac{\alpha}{2}+(1-\alpha)-\frac{1}{\alpha+1}$.
- Reordenando queda $A(\alpha) = \frac{\alpha(\alpha+1)+2-2\alpha^2-2}{2(\alpha+1)}$, luego $A(\alpha) = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(1+\alpha)}$.

(ii) Demostrar que el volumen del sólido engendrado al rotar la región R en torno al eje OY está dado por $V(\alpha) = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$.

- **Sol**: El volumen está dado por $V(\alpha) = 2\pi\int_0^1 x(\alpha x+1-\alpha-x^\alpha)$ Integrando queda $V(\alpha) = 2\pi(\frac{\alpha}{3}+\frac{1-\alpha}{2}-\frac{1}{\alpha+2})$.
- Luego $V(\alpha) = 2\pi\frac{2\alpha(\alpha+2)+3(1-\alpha)(\alpha+2)-6}{6(\alpha+2)}$ y por lo tanto
- $V(\alpha) = \pi\frac{2\alpha^2+4\alpha+6+3\alpha-3\alpha^2-6\alpha-6}{3(\alpha+2)}$. Entonces $V(\alpha) = \pi\frac{\alpha(1-\alpha)}{3(\alpha+2)}$.

(iii) Calcule el perímetro de la región R cuando $\alpha = \frac{2}{3}$.

- **Sol**: El perímetro está dado por el largo de la curva $x^{\frac{2}{3}}$ entre 0 y 1, la distancia desde el punto $(1,1)$ a la intersección de la recta tangente $y = \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ con el eje OY y la distancia desde el origen al punto de intersección. . El punto de intersección es $(\frac{1}{3},0)$. Luego, el perímetro $p = \sqrt{1+\frac{4}{9}}+\frac{1}{3}+L$, donde $L = \int_0^1\sqrt{1+(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}})^2}$.
- El valor de L está dado por $L = \int_0^1\sqrt{1+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}} = \int_0^1\frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{9}}}{x^{\frac{1}{3}}}$. Integrando obtenemos $L = (x^{\frac{2}{3}}+\frac{4}{9})^{\frac{3}{2}}\mid_0^1 = \frac{\sqrt{13}13-8}{27}$.
- Finalmente $p = \frac{22\sqrt{13}+1}{27}$.

•

P2. (i) Analice la convergencia de la serie $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3+2n+1}}$.

- **Sol**: Comparamos el término general con la sucesión $a_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Como $\frac{3}{2} > 1$ la serie $\sum a_n$ converge. Además,
- $L = \lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+2n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}} = 1$. Por lo tanto la convergencia de $\sum a_n$ implica la convergencia de la serie pedida .

(ii) Utilizando el criterio de la integral analice la convergencia de la serie $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

- **Sol**: En primer lugar, el término general es $f(n)$ para $f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ función que es decreciente y positiva .
- Ahora, $I = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = 2\lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-u}$. $I = 2\lim_{b\to\infty}(-e^{-u})|_1^b = \frac{2}{e}$. Como I converge el criterio de la integral dice que la serie debe ser convergente .

(iii) Para $a \neq 0$, considere la región R encerrada por la curva de ecuación $(a^2-x^2)y^2 = x^2(a^2+x^2)$ y sus asíntotas. Demuestre que el área de R es finita y calcúlela.

- **Sol**: Usando simetría se tiene que de existir, el área se calcula como $A = 4I$, con $I = \int_0^a x\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Esto constituye una integral impropia con función no acotada en el valor $x = a$. Para demostrar que converge aplicamos la definición: $I = \lim_{b\to a^-} I_b$, con $I_b = \int_0^b x\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$. La integral $I_b = \int_0^b x(\frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^4-x^4}})$ se separa en $\int_0^b a^2\frac{x}{\sqrt{a^4-x^4}} + \int_0^b \frac{x^3}{\sqrt{a^4-x^4}}$. Luego $I_b = \frac{a^2}{2}\text{arcsen }(\frac{x^2}{a^2})|_0^b - \frac{1}{2}\sqrt{a^4-x^4}|_0^b$ y por lo tanto $I_b = \frac{a^2}{2}\text{arcsen }(\frac{b^2}{a^2}) - \frac{1}{2}\sqrt{a^4-b^4} + \frac{a^2}{2}$. Entonces $I = \frac{a^2}{2}(\frac{\pi}{2}+1)$ y $A = a^2(\pi+2)$.

•

P3. (i) Demuestre que para todo $n \geq 0$ la integral $J_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ converge.

- **Sol**: Dado n se sabe que $x^n \leq e^{\frac{x}{2}}$ para todo $x > x_0$. Luego $x^n e^{-x} \leq e^{-\frac{x}{2}}$. Como $\int_0^\infty e^{-\frac{x}{2}}$ es convergente se concluye que J_n lo es .

(ii) Mediante integración por partes demuestre la recurrencia $J_{n+1} = (n+1)J_n$ para $n \geq 0$.

- **Sol**: Consideremos $J_{n+1} = \int_0^\infty x^{n+1} e^{-x} dx$. Tomando $u = x^{n+1}$ y $v' = e^{-x}$ se obtiene $u' = (n+1)x^n$ y $v = -e^{-x}$. Por lo tanto, $J_{n+1} = -x^{n+1}e^{-x}|_0^\infty + (n+1)\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$. Luego $J_{n+1} = (n+1)J_n$.

(iii) Usando un cambio de variables apropiado muestre que $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-anx} dx$ satisface $I_n = \frac{J_n}{(an)^{n+1}}$.

- **Sol:** Sea $y = anx$, entonces $I_n = \int_0^\infty (\frac{y}{an})^n e^{-y} \frac{1}{an} dy$. De modo que $I_n = \frac{J_n}{(an)^{n+1}}$.

(iv) Demostrar usando el criterio del cociente que la serie$\sum_{n\geq 1} I_n$ converge cuando $\frac{1}{e} < a$ y que no converge cuando $\frac{1}{e} > a$.

- **Sol**: Para usar el criterio del cociente calculamos $a_n = \frac{I_{n+1}}{I_n}$. Ahora, $a_n = \frac{J_{n+1}}{(a(n+1))^{n+2}} \frac{(an)^{n+1}}{J_n} = \frac{a^{n+1}n^{n+1}(n+1)}{a^{n+2}(n+1)^{n+2}} = \frac{n^{n+1}}{a(n+1)^{n+1}}$. Como $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ y $(1+\frac{1}{n}) \to 1$, se concluye que $a_n \to \frac{1}{ae}$. Por lo tanto si $ae > 1$ la serie converge y si $ae < 1$ la serie diverge .