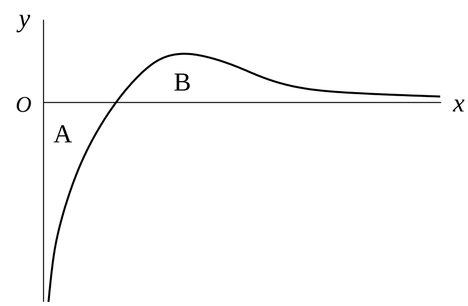
Pauta Control #6 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 28/11 18:00 A–L, 19:00 M–Z). Esta se puede obtener en la página: `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- (a) (3.0 ptos.) Sea $f : (0, +\infty) \to I\!R$ definida por $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x^2}$ (ver figura). Probar que las áreas A y B son finitas e iguales. Indicación: para probar la igualdad, use el cambio de variables $y = 1/x$.



(b) Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función decreciente y derivable en $I\!R$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

(i) (1.5 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty |f'(x)|\,dx < +\infty$ (converge).

(ii) (1.5 ptos.) Pruebe que $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{sen}\,(3x)\,dx$ converge. Indicación: integre por partes y use **(i)**.

Pauta P1.- (a) La función $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$ se anula en $x = 1$, de modo que

$$A = \left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx\right| \text{ y } B = \left|\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx\right|$$

De existir, probemos que las áreas son iguales haciendo $y = 1/x$

$$\begin{aligned} A = \left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx\right| &= \left|\int_{+\infty}^1 \frac{\ell n(1/y)}{1+(1/y)^2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy\right| \\ &= \left|-\int_1^\infty \frac{\ln y}{1+y^2}dy\right| = B \end{aligned}$$

- Finitud de A:

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx\right| = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad \leq \quad -\int_0^1 \ln x dx =$$
$$= \quad (-x\ln x + x)|_{x=0}^1 = 1 < +\infty$$

Otra forma es considerar por comparación

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \text{ si } \alpha > 0$$

si además se escoge $0 < \alpha < 1$, como $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge en este caso, entonces A converge. **Nota:** la mayoría de los alumnos probablemente escogerá $\alpha = 1/2$.

- Finitud de B:

$B = \left|\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx\right| = \int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}dx$, por comparación

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \frac{\ln x}{1+x^2} \quad = \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{1+x^2} x^{\alpha-2}\ln x = \lim_{x\to\infty} x^{\alpha-2}\ln x$$
$$= \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{2-\alpha}} = 0 \text{ si } \alpha > 2$$

si además se escoge $1 < \alpha < 2$, como $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$ converge entonces B converge. **Nota:** la mayoría de los alumnos probablemente escogerá $\alpha = 3/2$.

Nota: basta mostrar sólo **una convergencia** pues $A = B$, si un área es finita, la otra también.

(b) (i) Como f es decreciente $f' \leq 0$ y entonces para $a > 0$

$$\int_0^a |f'(x)|dx = -\int_0^a f'(x)dx = -f(a) + f(0)$$

luego

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a |f'(x)|dx = -\lim_{a\to\infty} f(a) + f(0) = f(0)$$

entonces

$$\int_0^\infty |f'(x)|dx = f(0) < +\infty.$$

(ii) Integrando por partes entre 0 y a, $a > 0$

$$\int_0^a f(x)sen(3x) = \frac{1}{3}\int_0^a f'(x)cos(3x)dx - \frac{1}{3}f(a)cos(3x) + \frac{1}{3}f(0).$$

Para probar la convergencia basta ver que

$$\int_0^a f'(x)cos(3x), \qquad f(a)cos(3x)$$

convergen cuando $a \to \infty$. El segundo límite es 0 de la hipótesis y el primero

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a |f'(x)cos(3x)|dx \leq \lim_{a\to\infty} \int_0^a |f'(x)|dx < +\infty$$

converge absolutamente, luego converge.

Puntaje P1

(a)	**[0.5 pto]**	Escritura de A y de B
	[1.0 pto]	$A = B$
	[1.5 pto]	Finitud de A o de B
(b) (i)	**[0.5 pto]**	Decreciente $\Rightarrow f' \leq 0$
	[0.5 pto]	TFC en intervalo $(0, a)$
	[0.5 pto]	uso de la hipótesis y conclusión
(b) (ii)	**[0.5 pto]**	Integración por partes
	[1.0 pto]	Resto

P2.- **(a)** **(i)** (1.5 ptos.) Pruebe que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n!}$ converge y calcule su valor.

(ii) (1.5 ptos.) Estudie la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{n!+1}{n^n}$.

(b) (3.0 ptos.) Para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} \quad ,$$

calcule primero $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, con esto justifique por qué para x grande $x^{\ln x} \leq e^x$ y luego aplíquelo al análisis de la serie.

Pauta P2.-

(a) (i) **Opción 1**. Telescópica, esto **prueba convergencia** y encuentra el valor.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n!} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1}{0!} - \frac{1}{N!} = 1 - \frac{1}{N!}$$

luego

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{n-1}{n!} = 1 - \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N!} = 1.$$

Opción 2. Por comparación o cuociente, esto prueba **sólo convergencia**.

Por comparación:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n-1}{n!}\leq \sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n-1)!}=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}=e<+\infty$$

Por cuociente:

$$\frac{\frac{(n-1)+1}{(n+1)!}}{\frac{n-1}{n!}}=\frac{n}{(n+1)!}\,\frac{n!}{n-1}=\frac{n}{(n+1)(n-1)}\to 0<1 \text{ converge.}$$

(ii) Por cuociente:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n+1)!+1}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!+1}{n^n}} &= \frac{(n+1)!+1}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{(n+1)!+1}{n+1}\,\frac{1}{n!+1}\\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\left[\frac{n!}{n!+1}+\frac{1}{(n+1)(n!+1)}\right]\to\frac{1}{e}<1 \text{ converge.}\end{aligned}$$

(b) Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

entonces $\exists M>0$ tal que

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\leq 1,\quad \forall x>M$$

esto es

$$\ln x\leq\sqrt{x},\quad \forall x>M$$

elevando al cuadrado (escogemos $M>1$ para que $\ln x>0$)

$$(\ln x)^2\leq x,\quad \forall x>M$$

pero

$$(\ln x)^2=\ln(x^{\ln x})$$

de modo que tomando exponencial a ambos lados de la desigualdad se obtiene

$$x^{\ln x}\leq e^x,\quad \forall x>M.$$

De lo anterior, con $x=\ln n$ se obtiene

$$(\ln n)^{\ell(\ln n)}\leq e^{\ln n}=n \quad \text{para } \ln n>M$$

esto es

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}\geq\frac{1}{n}\quad \text{para } n>e^M$$

de modo que por comparación la serie pedida diverge ya que la serie armónica

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

diverge.

Puntaje P2

(a)(i)	**[1.0 pto]**	Convergencia
	[0.5 pto]	Valor $= 1$
(a) (ii)	**[1.5 pto]**	Convergencia
(b)	**[1.0 pto]**	Límite
	[1.0 pto]	Desigualdad
	[1.0 pto]	Comparación con serie armónica

P3.- **(a)** (3.0 ptos.) Determine el radio e intervalo de convergencia (analizando los extremos) de la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n \ln(n+1)} x^n.$$

(b) Dada la sucesión de funciones $f_n : (0, +\infty) \to I\!R$ definida por

$$f_n(x) = e^{-n/x^2} \operatorname{sen}(nx), \quad n \in I\!N.$$

(i) (1.0 ptos) Calcule el límite puntual de $(f_n)_{n\in I\!N}$ en $(0, +\infty)$.

(ii) (2.0 ptos.) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_n\left(\frac{\pi(2n+1)^2}{2n}\right)\right|$$

y analice la convergencia uniforme de la sucesión $(f_n)_{n\in I\!N}$ en $(0, +\infty)$.

Pauta P3.-

(a) • Radio de convergencia:

$$\frac{\frac{1}{2^{n+1}\ln(n+2)}}{\frac{1}{2^n \ln(n+1)}} = \frac{1}{2}\frac{\ln(n+1)}{\ln(n+2)} \to \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ Radio } = 2.$$

En efecto $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+x)}{\ln(2+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{2+x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{1+x} = 1.$

• Análisis en $x = 2$:
$\Sigma \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$ es una serie alternante con $\frac{1}{\ln(n+1)} \to 0$ luego converge por el criterio de Leibniz.

• Análisis en $x = -2$:
$-\Sigma \frac{1}{\ln(n+1)}$ como $\ln(n+1) \leq n+2$ y $\Sigma \frac{1}{n+2}$ diverge, por comparación la serie también diverge.
$\Rightarrow$ Intervalo de convergencia $= (-2, 2]$ (abierto en -2).

(b) (i) $f(x) = \lim_{x\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} e^{-n/x^2} sen(nx) = 0, \forall x > 0$ pues $sen(nx)$ es acotada.

(ii) Tenemos

$$\left| f_n\left(\frac{\pi(2n+1)^2}{2n}\right)\right| = \left| e^{-\frac{2}{\pi^2}\frac{n^3}{(2n+1)^4}}\, sen\left(\frac{\pi}{2}(2n+1)^2\right)\right|$$

pero $(2n+1)$ impar $\Rightarrow (2n+1)^2$ impar $\Rightarrow sen(\frac{\pi}{2}(2n+1)^2) = \pm 1$, luego

$$\left| f_n\left(\frac{\pi(2n+1)^2}{2n}\right)\right| = e^{-\frac{2}{\pi^2}\frac{n^3}{(2n+1)^4}} \to 1$$

si $n \to \infty$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{(2n+1)^4} = 0.$$

Se puede concluir enseguida que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **no converge uniformemente** en $(0, +\infty)$ a $f = 0$, pues si

$$x_n = \frac{\pi(2n+1)^2}{2n}$$

entonces

$$\sup_{x>0} |f_n(x)| \geq |f_n(x_n)| \to 1$$

de modo que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |f_n(x)| \not\to 0.$$

Notas: 1.- Es probable que haya algunas argumentaciones diferentes de este último hecho. 2.- También se puede explicar con palabras, diciendo que para cada n siempre hay un punto x_n donde el supremo de las distancias es a lo menos 1. 3.- Algunos alumnos probaran **convergencia uniforme** en $(0, a)$ o $(0, a]$ con $a > 0$ (intervalo acotado) lo que es **correcto** pues

$$\sup_{x\in(0,a)} |f_n(x)| \leq e^{-n/a^2} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

Si no se probó la no convergencia uniforme pero sí lo anterior esto tiene 0.5 puntos.

Puntaje P3

(a)	**[1.0 pto]**	Radio de convergencia
	[1.0 pto]	Análisis en $x = 2$
	[1.0 pto]	Análisis en $x = -2$ e intervalo
(b) (i)	**[1.0 pto]**	Límite puntual
(ii)	**[1.0 pto]**	límite $\lvert f_n(x_n)\rvert$
	[1.0 pto]	Argumento no convergencia uniforme