Control 6 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA 1.

(i) $f(x) = -6x^2 + 5x + 1$
La recta por $P_0\,P$ es $Y = 1 + mx$
en que $m = \frac{f(a)-1}{a-0} = \frac{-6a^2+5a+1-1}{a} = 5 - 6a$.
Entonces, recta por $P_0\,P$ es
$Y = 1 + (5-6a)x$

De modo que el área es:

$$A = \int_0^a (f(x) - Y_{P_0\,P})dx = \int_0^a [(-6x^2 + 5x + 1) - (1 + 5x - 6ax)]dx$$
$$= \int_0^a (-6x^2 + 6ax)dx = [-2x^3 + 3a^2]_0^a = -2a^3 + 3a^3 = a^3$$
$$\therefore A = a^3, a \geq 0$$

(1.5 ptos.)

(ii) La intersección entre la recta $Y = mx$ y la parábola $Y = x^2$, será $mx = x^2$, es decir
$x = 0 \wedge x = m$
Entonces los volúmenes de revolución con respecto al eje OX y al eje OY serán:

$$V_{OX} = \pi \int_0^m [(mx)^2 - (x^2)^2]dx = \pi \int_0^m [m^2\,x^2 - x^4]dx = \pi \left[\frac{m^2\,x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^m = \frac{2\pi m^5}{15} \text{(0.5ptos.)}$$
$$V_{OY} = 2\pi \int_0^m x(mx - x^2)dx = 2\pi \int_0^m (mx^2 - x^3)dx = 2\pi \left[\frac{mx^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^m = \frac{2\pi m^4}{12} \quad \text{(0.5ptos.)}$$

Así, $V_{OX} = V_{OY}$ si $\dfrac{2\pi m^5}{15} = \dfrac{2\pi m^4}{12} \Rightarrow m = \dfrac{5}{4}, m > 0$ (0.5ptos.)

(iii) El volumen remanente, después de la perforación es:
$V = 2\pi \int_0^{x_0} [Y^2 - a^2]dx = 2\pi \int_0^{x_0} (R^2 - x^2 - a^2)dx$
en que $x_0^2 + a^2 = R^2 \Rightarrow x_0 = (R^2 - a^2)^{1/2}$

Entonces $V = 2\pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} - a^2 x\right]_0^{x_0} = 2\pi \left[(R^2 - a^2)x_0 - \frac{1}{3}x_0^3\right] = 2\pi \left[(R^2-a^2)^{3/2} - \frac{1}{3}(R^2-a^2)^{3/2}\right]$
de donde $V = \frac{4\pi}{3}(R^2 - a^2)^{3/2}$ y este volumen es $\frac{1}{2}V$ esfera $= \frac{2}{3}\pi R^3$ (2 ptos)
Así $\frac{4\pi}{3}(R^2 - a^2)^{3/2} = \frac{2\pi R^3}{3} \Rightarrow (R^2 - a^2)^3 = \frac{R^6}{4} \Rightarrow R^2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right) = a^2$, es decir $a = R\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt[3]{4}}}$

(1.0 pto.)

Control 6 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA 2.

(a) (i) $\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x^2} dx$ es integral impropia de segunda especie (en $x=0$).
Puede compararse por cuociente, esto es

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\text{arctg } x}{x^2}}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\text{arctg } x}{x} = 1 \neq 0 \qquad \text{(Por L'Hopital)}$$

y como $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ diverge, entonces $\int_0^1 \frac{\text{arctg } x}{x^2}dx$ también diverge. (1.0 pto.)

(ii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ es mixta, de primera y segunda especie.
Separando $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$
Para el caso $a > 0$: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ puede compararse directamente con:
$\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} \leq \frac{1}{ax^{1/2}} (x > 0)$ y como $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}}$ converge $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ converge.
Para $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ también por comparación $\frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} < \frac{1}{x^{3/2}} (a > 0)$ y como $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ converge (1.5 ptos.)

OBSERVACION: La convergencia de ambas integrales también se puede establecer por comparación por cuociente o usando la definición, es decir, encontrando primitivas y limites.
Para el caso $a = 0$: La integral queda $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ y se verifica inmediatamente, por ser integrales tipo conocidas, que $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge pero $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ diverge.
Entonces $\int_0^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ diverge.
Se concluye $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ converge si $a > 0$ y diverge si $a = 0$. (0.5 ptos.)

(b) (i) Si el área existe, su valor debe ser
$A = \int_0^1 Y dx = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ que corresponde
a una integral de 2ª especie ($x = 1$)

La integral converge y basta comparar por cuociente con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$
En efecto $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}\right) = \lim_{x\to 1}(x) = 1 \neq 0$ y como $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{1/2}}$ converge, entonces A converge.
Para su valor integramos $A = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}$ con $1 - x = u^2; dx = -2udu$
Así $A = \int_1^0 \frac{(1-u^2)(-2udu)}{u} = 2\int_0^1 (1-u)du = 2\left[u - \frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = 4/3$. (1.5 ptos.)

(ii) El volumen de revolución en torno al eje OY será $V = 2\pi\int_0^1 x\,Y\,dx = 2\pi\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}}$ que converge por el mismo criterio anterior ($g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \wedge \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1}(x^2) = 1$)

Para su valor $V = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx$ con $1 - x = u^2, dx = -2udu$ queda

$$V = 2\pi \int_1^0 \frac{(1-u^2)^2(-2udu)}{u} = 4\pi \int_0^1 (1 - 2u^2 + u^4)du$$

$$\Rightarrow V = 4\pi \left[u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 \right]_0^1 = \frac{32\pi}{15}$$

(1.5 ptos.)

OBSERVACION: Se acepta correcto si el alumno resuelve por integración directa y explica la convergencia al obtener resultados finitos.

Control 6 MA12A CALCULO
Pauta

PROBLEMA 3.

(i) Para la serie $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots$ su suma parcial es $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ y la serie es $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ (Términos positivos). (0.5 ptos.)

Para analizar la convergencia puede usarse el criterio del cuociente

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{n}=\lim\frac{n+1}{n(n+2)}=0<1$$

Entonces como $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$, la serie converge. (0.8 ptos.)

Para su valor, observar que $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k+1-1}{(k+1)!}$

Así $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]$ es una suma telescópica, es decir, $s_n=1-\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}s_n=1$

De modo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$ (converge a 1) (0.7 ptos.)

(ii) (1) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$ converge absolutamente.

En efecto, por comparación $\left|\frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}\right|<\frac{1}{\sqrt{n^4}}=\frac{1}{n^2}$ y como $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ converge, entonces $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n^4+4}}$ es absolutamente convergente. (0.6 ptos.)

(2) La serie $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}[\sqrt{n+1}-\sqrt{n}]=\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Converge por el criterio de Leiniz por ser serie alternante con $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to 0$ decreciendo (recíproco de sucesión creciente) (0.7 ptos.)

Pero $\sum\limits_{1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, por comparación, por ejemplo, con $\frac{1}{n+n}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ $n\geq 2$ y como $\frac{1}{2}\sum\limits_{2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge (armónica), se concluye que $\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ diverge.

Conclusión $\sum\limits_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ es condicionalmente convergente. (0.7 ptos.)

(iii) La integral $\int_0^1\frac{g(x)}{x^2}dx$ puede escribirse, mediante la sustitución $\frac{1}{x}=u,-\frac{1}{x^2}dx=du$ como $-\int_\infty^1 g\left(\frac{1}{u}\right)du=\int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)du$

Entonces $\int_0^1\frac{g(x)}{x^2}dx$ converge si y solo si $\int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)du$ converge. (1.0 pto.)

Además $\frac{d}{du}\left[g\left(\frac{1}{u}\right)\right]=-\frac{1}{u^2}g'\left(\frac{1}{u}\right)$ y como g es creciente, $g'\left(\frac{1}{u}\right)>0$ de modo que $\frac{d}{du}\left(g\left(\frac{1}{u}\right)\right)<0$

Así $g\left(\frac{1}{u}\right)$ es decreciente y no negativa. En consecuencia, por el criterio de la integral impropia, cuyas hipótesis se cumplen, $\sum\limits_{1}^{\infty}g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge $\Leftrightarrow\int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)du$ converge $\Leftrightarrow\int_0^1\frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

(1.0 pto.)