**Pauta Control #6 MA12A Cálculo**
**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile**
**Semestre 2005-2**

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

**Problema 1**

a) Considere la curva $C$ definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$.

i) Demuestre que la longitud de arco de la curva $C$ en el primer cuadrante esta dada por:

$$s = a^{1/3} \int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$$

En efecto, la longitud de arco es $s = \int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}dx$.
En este caso $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \overset{\text{derivando}}{\longrightarrow} \frac{2}{3}\ x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0$.
$\Rightarrow y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}$ **(0.5 ptos.)**
Así $s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\ dx = \int_0^a \frac{\sqrt{x^{2/3}+y^{2/3}}}{x^{1/3}}dx$.
Pero, en la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
Sigue que $s = \int_0^a \frac{\sqrt{a^{2/3}}}{x^{1/3}}dx \Rightarrow s = a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ **(1.0 pto.)**

ii) Demuestre que la integral $s$ converge y calcule su valor.
La integral $s = a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}}$ es impropia de $2^a$ Especie.
Basta establecer que es del tipo $\int_0^a \frac{dx}{x^{\alpha}}$ con $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ y por lo tanto converge (Materia de Clases) **(0.5 ptos.)**
O bien usar la definición

$$\begin{aligned} a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}} &= \lim_{t\to 0} a^{1/3}\int_t^a \frac{dx}{x^{1/3}} = a^{1/3}\lim_{t\to 0}\int_t^a x^{-1/3}dx \\ &= a^{1/3}\lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\left|x^{2/3}\right|_t^a = \frac{3}{2}a^{1/3}\lim_{t\to 0}(a^{2/3} - t^{2/3}) = \frac{3}{2}a^{1/3}\cdot a^{2/3} \end{aligned}$$

$\therefore$ Entonces $s = a^{1/3}\int_0^a \frac{dx}{x^{1/3}} = \frac{3}{2}a$.
Es decir $s$ converge y su valor es $\frac{3}{2}a$ **(1.0 pto.)**

**OBS.:** Se puede usar la definición y concluir que $s$ converge y dar su valor. **(1.5 ptos.)**

b) Dada la función definida por $f(x) = \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}$, $f : [0, \infty) \to I\!R$ se pide estudiar si existen

i) El área bajo la curva.
El área es $A = \int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}$ que es una integral impropia de $1^{era}$ Especie.
Una forma es comparar $\frac{1}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} \le \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{3/2}} \quad \forall x > 0$.
Entonces, por ejemplo $\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} + \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}$.
La primera integral converge (es propia) y la segunda converge por comparación con $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{3/2}}$ que converge por ser del tipo $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{\alpha}}$ con $\alpha = 3/2 > 1$.
Entonces el área bajo la curva EXISTE. **(1.0 pto.)**

ii) El volumen de revolución en torno al eje $OX$.
El volumen es $V = \pi \int_0^\infty f^2(x)dx = \pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(\sqrt{x}+2)^2}$.
Igual que en el caso anterior puede separarse $\int_0^\infty f^2(x) = \int_0^1 f^2(x) + \int_1^\infty f^2(x)dx$ en donde $\int_0^1 = \frac{dx}{(x+1)^2(\sqrt{x}+2)^2}$ es propia y $\int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(\sqrt{x}+2)^2}$ puede compararse, pués $\frac{1}{(x+1)^2(\sqrt{x}+2)^2} \leq \frac{1}{x^2}\frac{1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{x^3} \quad \forall x > 1$ y como $\int_1^\infty \frac{d}{x^3}$ converge $(\alpha = 3 > 1) \Rightarrow \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)^2(\sqrt{x}+2)^2}$ converge.
Así, el volumen de revolución en torno al eje $OX$ EXISTE. **(1.0 pto.)**

iii) El volumen de revolución en torno al eje $OY$.
El volumen es $V = 2\pi \int_0^\infty xf(x) = 2\pi \int_0^\infty \frac{xdx}{(x+1)(\sqrt{x}+2)}$ y en este caso diverge usando, por ejemplo la regla $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha \frac{x}{(x+1)(\sqrt{x}+2)} = 1$ si $\alpha = \frac{1}{2}$.
También puede usarse el criterio de comparación.
Así, el volumen de revolución con respecto al eje $OY$, NO EXISTE. **(1.0 pto.)**

**Problema 2**

a) Dada la serie numérica $\sum\limits_{2}^{\infty} a_n$, con $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^{\alpha}(ln\ n)^2}$ se pide:

i) Para $\alpha = 1$ estudiar la convergencia de $\sum\limits_{2}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$.

$\alpha = 1; \sum\limits_{2}^{\infty} a_n = \sum\limits_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(ln\ n)^2}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(ln\ n)^2} = 0$, además $\frac{1}{n(ln\ n)^2}$ decrece por ser recíproco de la sucesión creciente $n(ln\ n)^2$.

Así, se cumplen las hipótesis del Teorema de Leibnitz y la serie alternante $\sum\limits_{2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(ln\ n)^2}$ converge. **(1.0 pto.)**

$\alpha = 1; \sum\limits_{2}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n(ln\ n)^2}$. Según el criterio de lo integral, la serie converge si y solo si la integral $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(ln\ x)^2}$ converge, en donde la función $\frac{1}{x(ln\ x)^2}$ es decreciente.

En este caso $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(ln\ x)^2} = \int_{ln2}^{\infty} \frac{du}{u^2} = \lim\limits_{t\to\infty} \int_{ln2}^{t} u^{-2} dt = \lim\limits_{t\to\infty} \left| -\frac{1}{u} \right|_{ln2}^{t}$.

Sustitución $u = ln\ x$ $\qquad = \lim\limits_{t\to\infty} \left( \frac{1}{ln2} - \frac{1}{t} \right) = \frac{1}{ln2} \to$ CONVERGE.

$du = \frac{1}{x} dx$

Entonces $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$ converge. (Absolutamente convergente) **(1.0 pto.)**

ii) Para $\alpha \in (1, \infty)$ estudie la convergencia de $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$.

La serie es $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(ln\ n)^2}$.

En este caso, si $\alpha \in (1, \infty)$, por comparación $\frac{1}{n^{\alpha}(ln\ n)^2} < \frac{1}{n^{\alpha}}$, $\forall n$, pero $\sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge por ser $\alpha \in (1, \infty)$, es decir $\alpha > 1$.

Entonces $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$ converge. **(1.0 pto.)**

iii) Para $\alpha \in [0, 1)$ estudie la convergencia de $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$.

También en este caso $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}(ln\ n)}$, pero $\alpha < 1$.

Puede usarse el criterio de la integral $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(ln\ x)^2}$ ya que $\frac{1}{x^{\alpha}(ln\ x)^2}$ es decreciente en $[2, \infty)$.

Pero $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(ln\ x)^2} = \int_{ln2}^{\infty} \frac{e^u du}{e^{\alpha u} u^2} = \int_{ln2}^{\infty} \frac{e^{(1-\alpha)u}}{u^2} du$.

Sustitución $u = lnx \Rightarrow x = e^u$.

$du = \frac{1}{x} dx$

$\Rightarrow dx = e^u du$

y esta ultima integral diverge pués $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{e^{(1-\alpha)u}}{u^2} \to \infty (\neq 0)$

Así, la integral diverge y por lo tanto $\sum\limits_{2}^{\infty} |a_n|$ diverge. **(1.0 pto.)**

b) i) Estudie la convergencia de $\sum_{1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$.

Basta usar el criterio a la raíz ene-esima $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n}-1)^n} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1) = 1-1 = 0 < 1$.

Así $\sum_{1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ converge. **(1.0 pto.)**

ii) Convergencia de $\frac{4}{3}+\frac{5}{2.4}+\frac{6}{3.5}+\frac{7}{4.6}+\ldots$.

La serie es $\frac{4}{1.3}+\frac{5}{2.4}+\frac{6}{3.5}+\frac{7}{4.6}+\ldots = \sum_{1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}$

Comparando, por ejemplo, por cuociente con $\frac{1}{n}$ se tiene $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+3}{n(n+2)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{n^2+2n} = 1 \neq 0$

y como $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverge. (Serie Armónica)

Se concluye que la serie $\frac{4}{3}+\frac{5}{2.4}+\frac{6}{3.5}+\frac{7}{4.6}+\ldots$ también diverge. **(1.0 pto.)**

**NOTA:** Observar que existen otros métodos para el estudio de las convergencias o divergencias.

## Problema 3

Dada la sucesión de funciones definida por $f_n(x) = \frac{(e^x-2)^{2n}}{n}$ se pide:

i) Estudie la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x)$ en $[0,1]$

Para $x \in [0,1], 1 \leq e^x \leq e$ de modo que $-1 \leq e^x - 2 \leq e - 2 =0.718$, $x \in [0,1]$

Así $f_n(x) = \frac{(e^x-2)^{2n}}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Sigue que $\lim f_n(x) = f(x) = 0$, es decir $f_n(x) \xrightarrow{\text{c.p}} f(x) = 0$ (convergencia puntual)**(0.8 ptos.)**

Para la convergencia uniforme $\underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}} |f_n(x) - f(x)| = \underset{x\in[0,1]}{\text{Sup}} |\frac{(e^x-2)^{2n}}{n}| < \frac{1}{n} \to 0$, es decir $\forall \varepsilon > 0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para $n > n_0$, algun $n_0$. **(0.7 ptos.)**

Así $f_n(x) \xrightarrow{\text{c.u}} f(x) = 0$ (converge uniformemente)

ii) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Como $f_n(x)$ es integrable $\forall n$ y $f_n(x) \xrightarrow{\text{c.u}} f(x) = 0$ entonces

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x))dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0$ **(1.5 ptos.)**

**OBS.:** Si no aprovecha la convergencia uniforme y trata de calcular directamente, puede llegar a:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{(e^x-2)^{2n}}{n} dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{e-2} \frac{u^{2n}}{u+2} du$, con el cambio $u = e^x - 2$

$du = e^x dx$

pero, la integral es complicada y recursiva, salvo que la acote para calcular el límite.

**(Solo 0.5 ptos. si esta incompleto)**

iii) Estudie la convergencia puntual y uniforme de $f'_n(x)$ en $[0,1]$.

La sucesión de derivadas es $f'_n(x) = \frac{2n(e^x-2)^{2n-1}e^x}{n}$ es decir $f'_n(x) = 2e^x(e^x-2)^{2n-1}$

Si $x = 0, f'_n(0) = 2(1-2)^{2n-1} = -2$.

Si $x \in (0,1]$ el término $-1 < e^x - 2 < e - 2 =0.718$ de modo que $(e^x-2)^{2n-1} \to 0$.

Así $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x) = g(x) = \begin{cases} -2 & x = 0 \\ 0 \text{ si } x \in (0,1] \end{cases}$

Entonces $f'_n(x) \xrightarrow{\text{c.p}} g(x) = \begin{cases} -2, x = 0 \\ 0, x \in (0,1] \end{cases}$ (Convergencia Puntual) **(0.8 ptos.)**

**Convergencia Uniforme.**

Como la sucesión de funciones $f'_n(x) = 2e^x(e^x-2)^{2n-1}$ son todas continuas ($\forall n$) y la función límite $g(x)$ es discontinua, la convergencia no puede ser uniforme (TEOREMA).

Así $f'_n(x) \overset{\text{c.u}}{\not\to} g(x)$ **(0.7 ptos.)**

**OBS.:** También puede proceder con

$$\underset{x \in [0,1]}{\text{Sup}} |f'_n(x) - g(x)| = \underset{x \in [0,1]}{\text{Sup}} |2e^x(e^x-2)^{2n-1} - 0| = 2 \not\to 0$$

iv) Estudie la convergencia puntual y uniforme de $f_n(x)$ en $(-\infty, 0)$.

En este caso, $x \in (-\infty,0) \Rightarrow 0 < e^x < 1 \Rightarrow -2 < e^x - 2 < -1$ o bien $1 < 2 - e^x < 2 \Rightarrow (2-e^x)^{2n} \to \infty$.

Así $f_n(x) = \frac{(e^x-2)^{2n}}{n} \to \infty$.

Sigue que $f_n(x)$ no converge puntual ni uniformemente en $(-\infty,0)$ ($f_n(x)$ diverge $\forall x \in (-\infty,0)$)

**(1.5 ptos.)**