Solución Control 6, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (11 de Noviembre)

P1. Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida por $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

a)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n\sqrt{n}} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}\frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) Usando la parte (i) se tiene que:

La serie $\sum a_n$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum n^{3/2}$ la cual diverge.

La serie $\sum \frac{1}{a_n}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ la cual converge.

La serie $\sum (-1)^n a_n$ tiene su n-ésimo término que no tiende a cero, luego diverge.

La serie $\sum (-1)^n \frac{1}{a_n}$ converge absolutamente.

c) Usando nuevamente la parte (i) se tiene que la serie $\sum \frac{a_n}{n^p}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum \frac{1}{n^{p-3/2}}$, la cual converge ssi $p - 3/2 > 1$, o sea ssi $p > 5/2$.

P2.

a) *(1.5 ptos.)* Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in [n, n+1)$ se cumple que:

$$\begin{aligned}
x &\in [n, n+1), \\
x - [x] &= x - n \in [0, 1), \\
0 \le (x - [x])^x &\le (x-n)^n \qquad \text{y} \\
0 < \frac{1}{x+1} &\le \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$0 \le f(x) \le \frac{(x-n)^n}{n+1}.$$

b) *(1.5 ptos.)* Usando la desigualdad anterior, se tiene que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(x)dx &\le \int_n^{n+1} \frac{(x-n)^n}{n+1} dx \\
&= \frac{1}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

c) *(2.0 ptos.)* Si llamamos $\{s_n\}$ a la sucesión definida por $s_n = \displaystyle\int_1^{n+1} f(x)dx$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
s_n &= \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \qquad \text{donde } a_k = \int_k^{k+1} f(x)dx
\end{aligned}$$

Es decir $\{s_n\}$ es una serie $\sum a_n$, dominada por la serie $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$.
Como esta última serie es convergente, $\{s_n\}$ es convergente.

d) *(1.0 ptos.)* Llamemos $F(b)$ a la integral

$$F(b) = \int_1^b f(x)dx$$

Sabemos que existe el límite en variable discreta

$$\lim_{n\to\infty} F(n) = \ell.$$

Debemos probar que existe el límite en variable continua

$$\lim_{b\to\infty} F(b).$$

Como $f(x) \ge 0$ se concluye que $F(b)$ es creciente, luego para probar que su límite existe basta con probar que es acotada.

Esto último es cierto ya que:

$$\begin{aligned}
F(b) &\le F([b]+1) \\
&= F(n), \qquad \text{para } n = [b]+1 \\
&\le \ell, \qquad \text{ya que } F(n) \text{ converge crecientemente a } \ell.
\end{aligned}$$

P3.

a) i) La sucesión $\cos(1/n)$ converge a 1 por lo tanto la serie $\sum\{1+\cos(1/n)\}$ no converge. Además $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos(1/n)}{(1/n)^2} = \dfrac{1}{2}$ por lo tanto la serie $\sum\{1-\cos(1/n)\}$ tiene el mismo comportamiento que la serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$, la que converge.

ii) La sucesión $\operatorname{sen}(1/n)$ converge decrecientemente a cero, por lo tanto usando el criterio de Leibnitz se deduce que la serie $\sum(-1)^n \operatorname{sen}(1/n)$ converge.

iii) La serie $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)\{\ln(\ln n)\}^2}$ se estudia usando el criterio integral.
Para ello definimos $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)\{\ln(\ln x)\}^2}$ la cual es una función positiva y decreciente para $x \geq 2$.
Además la integral impropia se calcula así:

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} f(x)dx &= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)\{\ln(\ln x)\}^2} dx \qquad ; u = \ln(\ln(x)), \\
&= \lim_{b\to\infty} \int_{\ln(\ln 2)}^{\ln(\ln b)} \frac{1}{u^2} du \\
&= \int_{\ln(\ln 2)}^{\infty} \frac{1}{u^2} du.
\end{aligned}$$

Como esta última integral impropia es convergente, se deduce que la serie estudiada también lo es.

iv) Acotando, obtenemos que la serie $\sum \dfrac{\operatorname{sen}(1+\ln(n!))}{\sqrt{n^4+n+1}}$, en módulo, es dominada por la serie $\sum \dfrac{1}{n^2}$. Por lo tanto converge absolutamente.

b) *(2.0 ptos.)*
El área de la región pedida se calcula mediante la integral impropia

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)(1+x+x^2)}},$$

la cual **converge** ya que su argumento se comporta como $\frac{1}{x^{(1/2)}}$ en torno a cero y como $\frac{1}{(1-x)^{(1/2)}}$ en torno a uno.

El volumen engendrado por la rotación de R en torno al eje OX se calcula mediante la integral impropia

$$V_{OX} = \pi \int_0^1 \frac{1}{x(1-x)(1+x+x^2)},$$

la cual **diverge** ya que su argumento se comporta como $\frac{1}{x^1}$ en torno a cero y como $\frac{1}{(1-x)^1}$ en torno a uno.

El volumen engendrado por la rotación de R en torno al eje OY se calcula mediante la integral impropia

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(1-x)(1+x+x^2)}},$$

la cual **converge** ya que es propia en cero y su argumento se comporta como $\frac{1}{(1-x)^{(1/2)}}$ en torno a uno.