Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 02 de Agosto del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL RECUPERATIVO PRIMER SEMESTRE

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Considere la función $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

(1,2 pts.) (a) Determine el dominio y los ceros de f.

(1,2 pts.) (b) Estudie la paridad y el crecimiento de f.

(1,2 pts.) (c) Estudie la continuidad de f. Pruebe que el recorrido de f es todo $\mathbb{R}$.

(1,2 pts.) (d) Determine las asíntotas de f. Bosqueje el gráfico de f.

(1,2 pts.) (e) Justifique la invertibilidad de f y encuentre su inversa.

Solución:

(a) Veamos el dominio y los ceros de f, recordemos que $\ln(a) = 0$ ssi $a = 1$, luego

$$f(x) = 0 \quad ssi \quad \left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 1$$

o equivalentemente $x \neq 1$ y $1 + x = 1 - x$, en consecuencia $2x = 0$, i.e. $x = 0$. Así, $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Por lo tanto, f posee sólo un cero en $x = 0$ (0,4 pts.).

Recordemos que $\mathrm{Dom}(\ln) = (0, +\infty)$ de modo que el dominio de f está dado por

$$\mathrm{Dom}(f) \ = \ \{x \in \mathbb{R} | 1 - x \neq 0 \ \ \wedge \ \ \frac{1+x}{1-x} > 0\} \qquad (0,4 \text{ pts.})$$

Pero

$$\frac{1+x}{1-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1),$$

y por lo tanto

$$\mathrm{Dom}(f) = (-1, 1), \qquad (0,4 \text{ pts.})$$

(b) Veamos primero la paridad de f. Tenemos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \ln(1-x) - \ln(1+x) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto $f(x)$ es impar (0,4 pts.).

Para el crecimiento, recordemos que la función logaritmo es estrictamente creciente, luego basta estudiar el crecimiento de la función

$$g(x) = \frac{1+x}{1-x} \quad \text{(0,3 pts.)}$$

Sean $x, y \in (-1,1)$ tales que $x > y$, luego

$$\begin{aligned} g(x) - g(y) &= \left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \left(\frac{1+y}{1-y}\right) = \frac{(1+x)(1-y) - (1+y)(1-x)}{(1-x)(1-y)} \\ &= \frac{2x-2y}{(1-x)(1-y)} = \frac{2(x-y)}{(1-x)}(1-y) > 0 \end{aligned}$$

pues $1-x > 0$ y $1-y > 0$. Es decir, $x > y \Rightarrow g(x) > g(y)$ (0,3 pts.). Por lo tanto g es estrictamente creciente y así f es estrictamente creciente, por ser composición de funciones crecientes (estrictamente) (0,2 pts.).

(c) La función $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$ es continua en $(-1,1)$, ya que es cuociente de funciones continuas y $1-x \neq 0$. Como además la función logaritmo natural es continua, se tiene que $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es continua por ser composición de funciones continuas (0,6 pts.).

Probemos ahora que $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$. Por definición

$$\begin{aligned} \text{Rec}(f) &= \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \text{Dom}(f), y = f(x)\} \\ &= \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in (-1,1), y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\}. \qquad \text{(0,2 pts.)} \end{aligned}$$

Notemos que para $x \in (-1,1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &\Leftrightarrow e^y = \frac{1+x}{1-x} \\ &\Leftrightarrow (1-x)e^y = (1+x) \\ &\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^y-1}{e^y+1}, \qquad \text{(0,2 pts.)} \end{aligned}$$

Así

$$\text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in (-1,1), x = \frac{e^y-1}{e^y+1}\} = \{y \in \mathbb{R} | -1 < \frac{e^y-1}{e^y+1} < 1\}.$$

Como $e^y + 1 > 0$, se tiene

$$\begin{aligned} -1 < \frac{e^y-1}{e^y+1} < 1 &\Leftrightarrow -(e^y+1) < e^y - 1 < e^y + 1 \\ &\Leftrightarrow -e^y - 1 < e^y - 1 < e^y + 1 \end{aligned}$$

Pero $e^y - 1 < e^y + 1$ es válida para todo y $\in \mathbb{R}$, lo mismo que $-e^y - 1 < e^y - 1 \Leftrightarrow 2e^y > 0$, de donde se concluye que

$$\text{Rec}(f) = \mathbb{R} \qquad \text{(0,2 pts.)}$$

(d) f no posee asíntotas horizontales ya que f es continua, monótona y su recorrido es $\mathbb{R}$ (0,2 pts.). Además, f posee dos asíntotas verticales, ya que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty\right) \qquad (0{,}2 \text{ pts.})$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty \quad \left(\lim_{x\to -1^+} \frac{1+x}{1-x} = 0\right) \qquad (0{,}2 \text{ pts.})$$

Por otra parte, f no posee asíntotas oblicuas ya que f es continua en $(-1,1)$ y posee asíntotas verticales en los extremos del intervalo (0,2 pts.).

Bosquejo del gráfico (4,0 pts.).

(e) Si consideramos

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

entonces f es invertible, ya que f es sobreyectiva (por (c)) y f es inyectiva puesto que es estrictamente creciente, por lo tanto f es biyectiva (0,6 pts.).

Veamos su inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R} &\longrightarrow (-1,1) \\ y &\longrightarrow f^{-1}(y) \end{aligned}$$

donde $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$ (0,3 pts.), por lo tanto

$$\begin{aligned} y = \ln\left(\frac{x+x}{1-x}\right) &\Leftrightarrow e^y = \frac{x+1}{1-x} \\ &\Leftrightarrow (1-x)e^y = x+1 \\ &\Leftrightarrow x(1+e^y) = e^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{e^y-1}{1+e^y}, \end{aligned}$$

y así

$$f^{-1}(y) = \frac{e^y-1}{e^y+1} \qquad (0{,}3 \text{ pts.})$$

Problema 2.

(a) Analice la convergencia de las siguientes sucesiones y determine el valor del límite cuando éste exista.

(1,0 pto.) (a.1) $((-1)^n + \frac{1}{n})^n$.

(1,0 pto.) (a.2) $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}}$.

(1,0 pto.) (a.3) $\left(\frac{2n^2+4}{5n^2+1}\right)^n$.

(b) Dado $x_0 \in (0,1)$, considere la fórmula de recurrencia

$$x_{n+1} = \frac{1}{2-x_n}$$

(1,0 pto.) (b.1) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in (0,1)$.

(1,0 pto.) (b.2) Demuestre que (x_n) es creciente.

(1,0 pto.) (b.3) Deduzca que (x_n) converge y determine su límite.

Solución:

(a.1) Sea $s_n = ((-1)^n + \frac{1}{n})^n$

- Subsucesión s_{2n}:

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left((-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Luego $s_{2n} \longrightarrow e$ por ser subsucesión de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (0,4 pts.).

- Subsucesión s_{2n+1}:

$$\begin{aligned} s_{2n+1} &= \left((-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+1}\left(1 + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{2n+1} \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}. \end{aligned}$$

Luego $s_{2n+1} \to -\frac{1}{e}$ por ser subsucesión de $-(1 - \frac{1}{n})^n$ (0,4 pts.).

- Conclusión: como (s_n) tiene 2 subsucesiones con límites distintos, la sucesión no es convergente (0,2 pts.).

(a.2) Sea $s_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k}}$. Como

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{k}{n+k} \leq 1$$

para todo $k \in \{1, 2, ...n\}$, se tiene

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} \leq n$$

y en consecuencia

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \leq s_n \leq \sqrt[n]{n} \quad \text{(0,5 pts.)}$$

Por sandwich, como $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \to 1$ y $\sqrt[n]{n} \to 1$, se concluye que $s_n \to 1$ (0,5 pts.).

(a.3) Sea $s_n = \left(\frac{2n^2+4}{5n^2+1}\right)^n$ y llamemos $u_n = \frac{2n^2+4}{5n^2+1}$. Como

$$u_n = \frac{2n^2+4}{5n^2+1} = \frac{2+4/n^2}{5+1/n^2} \to \frac{2}{5},$$

a partir de algún n_0, se tiene que

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{5} \leq u_n \leq \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \quad \text{(0,5 pts.)}$$

(esto es $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ para $\varepsilon = \frac{1}{5}$ y $\ell = \frac{2}{5}$), de donde

$$\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq u_n^n = s_n \leq \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Por sandwich, puesto que $(\frac{1}{5})^n \to 0$ y $(\frac{3}{5})^n \to 0$, concluimos que $s_n \to 0$ (0.5 pts.).

$\star$ Otra forma: tratar de formar una sucesión tipo exponencial

$$\begin{aligned} s_n &= \left(\frac{2n^2+4}{5n^2+1}\right)^n = \left(\frac{2n^2+2/5+4-2/5}{5n^2+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{2(n^2+1/5)}{5(n^2+1/5)} + \frac{18/5}{5n^2+1}\right)^n = \left(\frac{2}{5} + \frac{18/5}{5n^2+1}\right)^n \end{aligned}$$

y como antes, por sandwich, su límite es 0.

(b.1) Tenemos que $x_0 \in (0,1)$ por hipótesis (0,2 pts.). Si para $n = k$, $x_n \in (0,1)$ veamos que pasa para $n = k+1$:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2 - x_k}$$

Como

$$\begin{aligned} & 0 < x_k < 1 \\ \Rightarrow\ & 0 > -x_k > -1 \qquad (\cdot(-1)) \\ \Rightarrow\ & 2 > 2 - x_k > 1 \qquad (+2) \\ \Rightarrow\ & \tfrac{1}{2} < \frac{1}{2-x_k} < 1, \qquad \text{(recíprocos)} \end{aligned}$$

esto es, $x_k + 1 \in (\frac{1}{2}, 1) \subseteq (0,1)$ (0,6 pts.). Por inducción, se concluye que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in (0,1) \quad \text{(0,2 pts.)}$$

(b.2) Calculamos la diferencia (0,2 pts.):

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2-x_n} - x_n \\ &= \frac{1 - x_n(2-x_n)}{2-x_n} = \frac{1 - 2x_n + x_n^2}{2-x_n} \\ &= \frac{(x_n-1)(x_n-1)}{2-x_n} = \frac{(x_n-1)^2}{2-x_n} \end{aligned}$$

El numerador es positivo, y el denominador es positivo pues $x_n \in (0,1)$ (0,6 pts.). Luego $x_{n+1} - x_n > 0 \Leftrightarrow x_n < x_{n+1}$, esto es, la sucesión es creciente (0,2 pts.).

$\star$ Otro método consiste en probar que $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$. En efecto,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{x_n(2-x_n)} = \frac{1}{-x_n^2+2x_n} = \frac{1}{-(x_n-1)^2+1} > 1$$

pues $1-(x_n-1)^2 < 1$ (0,6 pts. por probar que el cuociente es > 1)

(b.3) La sucesión es creciente (b.2) y acotada (b.1), luego es convergente por teorema correspondiente (0,4 pts.). Sea L su límite. Tomando límite en la fórmula de recurrencia, obtenemos la relación:

$$L = \frac{1}{2-L} \Leftrightarrow -L^2+2L-1=0 \Leftrightarrow -(L-1)^2 = 0 \qquad \text{(0,3 pts.)}$$

La única solución es $L = 1$, de modo que $x_n \longrightarrow 1$ (0,3 pts.).

Problema 3.

(3.0 ptos.) (a) Sea la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\alpha x}-1}{\operatorname{sen}(x)} & \text{si} \quad x < 0 \\ \beta & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(\gamma+x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Encuentre α, β y γ para que f sea continua en $\bar{x} = 0$.

(1.5 ptos.) (b) Sea $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ una función continua. Pruebe que $\exists \alpha > 0$ tal que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geq \alpha$.

(1.5 ptos.) (c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ una función continua. Pruebe que $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$.

Solución:

(a) $*$ Por una parte, f es continua en $\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = \beta$ (0,5 pts.).

$*$ Pero $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \beta \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \beta$ (0,5 pts.).

$*$ Ahora bien, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(\gamma+x)}{x}$ existe $\Leftrightarrow \gamma = 1$ (0,5 pts.), en cuyo caso vale 1 (0,5 pts.). Por lo tanto, $\beta = 1 = \gamma$.

$*$ Finalmente, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{\alpha x}-1}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \alpha \underbrace{\dfrac{(e^{\alpha x}-1)}{\alpha x}}_{\text{(0.5 pts.)}} \underbrace{\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}}_{\text{(0.5 pts.)}} = \alpha.$

$*$ Luego, $\alpha = \beta = \gamma = 1$.

(b) Por el teorema de Weierstrass para $f : [a,b] \to (0,+\infty)$ continua, existe $\underline{x} \in [a,b]$ con $f(x) \geq f(\underline{x})$ $\forall x \in [a,b]$ (0,5 pts.). Como $\mathrm{Rec}(f) \subseteq (0,+\infty)$ entonces $f(\underline{x}) > 0$ (0,5 pts.). Finalmente, tomando $\alpha = f(\underline{x})$ se concluye (0,5 pts.).

(c) Sean $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\alpha := f(x_0)$. Queremos probar que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \alpha$. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_0$ y veamos que $f(x) = \alpha$. En efecto, tomando $a = \min\{x_0, x\}$, $b = \max\{x_0, x\}$, $c = \min\{f(x_0), f(x)\}$ y $d = \max\{f(x_0), f(x)\}$ (o suponer que $x_0 < x$ y $f(x_0) < f(x)$ y luego los demás casos), entonces por el teorema del valor intermedio $f([a,b]) \supseteq [c,d]$ (0,5 pts.). Si eventualmente $c < d$ entonces se tendría que $[c,d] \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, en cuyo caso $f([a,b]) \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis $f([a,b]) \subseteq \mathbb{Q}$. Concluimos que $c = d$ (0,5 pts.). Así, $\forall x \neq x_0$, $f(x) = f(x_0) = \alpha$ (0,5 pts.).