U. DE CHILE

INGENIERIA

Pauta Control Recuperativo MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2004

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato `ps` o `pdf`.

P1.- **a)** Considere una sucesión u_n que verifica las siguientes propiedades

$$\lim_{n\to\infty} u_{2n} = l, \qquad \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - u_n| = 0.$$

i) (1 pto.) Pruebe que $\quad \forall\varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0,\ k \text{ par} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon.$

ii) (1,5 ptos.) Pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = l$, y deduzca que

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_1,\ k \text{ impar} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon.$$

iii) (1,5 ptos.) Demuestre que $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = l$.

b) (2 ptos.) Muestre que una sucesión que satisface

$$|u_{n+2} - u_n| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

no puede ser convergente.
<u>Indicación:</u> recuerde el criterio de Cauchy.

Pauta. **a)** i) Sea $\varepsilon > 0$. Como $u_{2n} \to l$ tenemos por definición que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tiene $|u_{2n} - l| < \varepsilon$. Elijamos $k_0 = 2n_0$. Si $k \geq k_0$ y k es par entonces podemos escribir $k = 2n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ que además cumplirá $n \geq n_0$. Así $|u_k - l| = |u_{2n} - l| < \varepsilon$.

ii) Primeramente probemos que $u_{2n+1} \to l$. En efecto $u_{2n+1} = (u_{2n+1} - u_{2n}) + u_{2n}$. Por hipótesis $u_{2n+1} - u_{2n} \to 0$ (es una subsucesión de $u_{n+1} - u_n$) y como $u_{2n} \to 0$ vemos que $u_{2n+1} \to l$.
Para la segunda parte de esta pregunta, procedemos de manera análoga a la anterior. Como $u_{2n+1} \to l$ dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_1$ se tiene $|u_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Escojamos $k_1 = 2n_1 + 1$. Luego si k es impar podemos escribirlo de la forma $k = 2n + 1$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Si además $k \geq k_1$ entonces $n \geq n_1$ y luego $|u_k - l| = |u_{2n+1} - l| < \varepsilon$.

iii) Procedemos por definición. Dado $\varepsilon > 0$ escogemos k_0 como en la parte i) y k_1 como en ii), es decir

$$\forall k \geq k_0,\ k \text{ par} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon$$

y

$$\forall k \geq k_1,\ k \text{ impar} \Rightarrow |u_k - l| < \varepsilon.$$

Definamos $k_2 + \max(k_0, k_1)$. Si $k \geq k_2$ y k es par, como $k \geq k_2 \geq k_0$ tenemos $|u_k - l| < \varepsilon$. Si $k \geq k_2$ y k es impar, como $k \geq k_2 \geq k_1$ tenemos $|u_k - l| < \varepsilon$.

b) Es necesario (o útil) recordar dos cosas: primero, una sucesión (u_n) se dice de Cauchy si cumple

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |u_m - u_n| < \varepsilon,$$

y segundo: una sucesión (u_n) es convergente si y sólo si es de Cauchy. Por lo anterior, una sucesión (u_n) no converge si y solamente si cumple

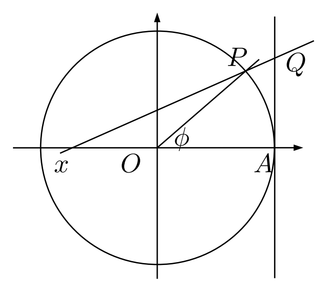
$$\exists\varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n, m \geq n_0 \quad |u_m - u_n| \geq \varepsilon.$$

Probemos la propiedad precedente seleccionando $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Si $n_0 \in \mathbb{N}$ es cualquiera, tomando $n = n_0$ y $m = n_0 + 2$ directamente del enunciado se cumple $|u_m - u_n| = |u_{n_0+2} - u_{n_0}| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Puntaje.

a)	i)	1	
	ii)	0,8	$u_{2n+1} \to l$
		0,7	$\forall \varepsilon \dots$
	iii)	1,5	Para una respuesta como en la pauta dar 0,5 por escoger un buen k_0 (dado ε), 0,5 por razonar correctamente en los distintos casos, 0,5 más por tener concluir correctamente. Hay otras formas de argumentar. En particular en clases esto puede haberse visto como un resultado: si $u_{2n} \to l$ y $u_{2n+1} \to l$ entonces $u_n \to l$. En ese caso asignar el puntaje completo por enunciar correctamente el teorema.
b)		0,5	por tener de alguna manera la definición de sucesión de Cauchy y su equivalencia con la convergencia
		0,5	por la negación del criterio de Cauchy
			si alguien tiene correcta la negación del criterio de Cauchy, y no tiene explícito el criterio mismo, y su equivalencia con la convergencia, pero se ve que "todo calza", se debe asignar 1 pto. hasta aquí.
		0,5	por tener un ε útil
		0,5	por concluir correctamente
			Se puede argumentar de otras formas. Por ejemplo suponiendo que la sucesión converge a un cierto l y encontrando una contradicción con esto. En este caso: 0,5 ptos. por tener la negación de la convergencia, 0,5 por escoger ε útil, 0,5 por una desigualdad triangular del tipo: $\lvert u_{n+2} - u_n \rvert \le \lvert u_{n+2} - l \rvert + \lvert l - u_n \rvert$, y 0,5 por la conclusión.

P2.- Sea P un punto sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y denotemos por ϕ el ángulo $\sphericalangle AOP$, donde O es el origen y $A = (1, 0)$. Supongamos $\phi \neq 0$ y sea Q el punto $(1, \lambda)$ con $\lambda \neq \sin(\phi)$. Por los puntos P y Q se traza una recta que corta al eje de las abscisas en un punto de abscisa x.



a) (2 ptos.) Muestre que

$$x = 1 - \frac{\lambda(1 - \cos(\phi))}{\lambda - \sin(\phi)}.$$

b) (4 ptos.) Suponga que λ se escoge de la forma $\lambda = \frac{\sin(\phi)}{1-\phi^k}$ donde $k = 1, 2, 3$ obteniéndose así una función $x_k(\phi)$. Calcular:

i) $\lim\limits_{\phi \to 0} x_1(\phi)$ (para $k = 1$),

ii) $\lim\limits_{\phi \to 0} x_2(\phi)$ (para $k = 2$), y

iii) $\lim\limits_{\phi \to 0^+} x_3(\phi)$ (para $k = 3$).

Pauta. **a)** Notemos que $P = (\cos(\phi), \sin(\phi))$ y que $Q = (1, \lambda)$. La recta que pasa por P y Q tiene pendiente

$$\frac{\lambda - \sin(\phi)}{1 - \cos(\phi)}$$

y luego la ecuación de esta recta se puede escribir

$$y = \frac{\lambda - \sin(\phi)}{1 - \cos(\phi)}(x - 1) + \lambda.$$

La intersección con el eje x se encuentra resolviendo

$$\frac{\lambda - \sin(\phi)}{1 - \cos(\phi)}(x - 1) + \lambda = 0,$$

es decir

$$x = 1 - \frac{\lambda(1 - \cos(\phi))}{\lambda - \sin(\phi)}.$$

b) Conviene encontrar una expresión para $x_k(\phi)$:

$$\begin{aligned} x_k(\phi) &= 1 - \frac{\frac{\sin(\phi)}{1-\phi^k}(1-\cos(\phi))}{\frac{\sin(\phi)}{1-\phi^k} - \sin(\phi)} \\ &= 1 - \frac{1-\cos(\phi)}{1-(1-\phi^k)} \\ &= 1 - \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^k}. \end{aligned}$$

Para calcular todos los límites pedidos es muy útil recordar que

$$\lim_{\phi \to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2} = \frac{1}{2}.$$

De este se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi} &= \lim_{\phi \to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2}\phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

No es preciso probar estos límites (se ven en clase).

i)

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \to 0} x_1(\phi) &= \lim_{\phi \to 0}\left(1 - \lim_{\phi \to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \to 0} x_2(\phi) &= 1 - \lim_{\phi \to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \to 0^+} x_3(\phi) &= \lim_{\phi \to 0}\left(1 - \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^3}\right) \\ &= 1 - \lim_{\phi \to 0^+} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2}\frac{1}{\phi}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{\phi \to 0^+} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2} = \frac{1}{2}$ y $\phi \to 0^+$ vemos que $\lim_{\phi \to 0^+} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2}\frac{1}{\phi} = \infty$. Luego

$$\lim_{\phi \to 0^+} x_3(\phi) = -\infty.$$

Puntaje.

a)		0,5	las coordenadas de P
		1	la ecuación de la recta
		0,5	la respuesta
			La ecuación de la recta debe aparecer de alguna manera, quizá escrita de una manera distinta de como aparece en esta pauta.
b)		0,5	fórmula para $x_k(\phi)$ (basta que se encuentre correctamente en un caso, por ejemplo $k=1$)
		0,7	$\lim_{\phi\to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi}$
		0,8	$\lim_{\phi\to 0} \frac{1-\cos(\phi)}{\phi^2}$
	i)	0,5	
	ii)	0,5	
	iii)	1	esta parte requiere de manejo de límites infinitos

P3.- **a)** i) (1 pto.) Pruebe la siguiente fórmula

$$\max(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2} \qquad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

ii) (1 pto.) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas. Muestre que la función definida por $h(x) = \max(f(x), g(x))$ es continua.

b) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} a\frac{\sin(2x)}{\pi - x} & \text{si } x < \pi, \\ b & \text{si } x = \pi, \\ \frac{\ln((1-\pi+x)^2)}{e^x - e^\pi} & \text{si } x > \pi, \end{cases}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

i) (1,5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x)$.

ii) (1,5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x)$.

iii) (1 pto.) ¿Existen $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en π? Si existen, encuéntrelos.

Pauta. **a)** i) Se puede proceder por casos: si $a \geq b$ entonces

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = a = \max(a,b).$$

Si $a < b$

$$\frac{a+b+|a-b|}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = b = \max(a,b).$$

ii) Por la parte anterior podemos escribir

$$\max(f(x), g(x)) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}.$$

Como f y g son continuas sabemos que $f-g$ es continua y luego $|f-g|$ es continua. Se sigue que la expresión del lado derecho defina una función continua, luego $\max(f,g)$ es continua.

b) i)

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = a \lim_{x\to\pi^-} \frac{\sin(2x)}{\pi - x}.$$

Hagamos el cambio de variables $y = \pi - x \to 0^+$. Así

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^-} f(x) &= a \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2(\pi - y))}{y} \\ &= a \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2\pi - 2y)}{y} \end{aligned}$$

y por periodicidad e imparidad de la función seno

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi^-} f(x) &= a \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-2y)}{y}\\ &= -a \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{y}\\ &= -2a \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(2y)}{2y}\\ &= -2a.\end{aligned}$$

ii)

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} \frac{\ln((1-\pi+x)^2)}{e^x - e^\pi}.$$

Esta vez escribamos $y = x - \pi \to 0^+$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi^+} f(x) &= \lim_{y\to 0^+} 2\frac{\ln(1+y)}{e^{y+\pi} - e^\pi}\\ &= \frac{2}{e^\pi} \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{e^y - 1}\\ &= \frac{2}{e^\pi} \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln(1+y)}{y}\frac{y}{e^y-1}\\ &= \frac{2}{e^\pi}.\end{aligned}$$

iii) Para que f sea continua en π se debe tener

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi),$$

es decir, se debe cumplir

$$-2a = \frac{2}{e^\pi} = b.$$

La respuesta es que sí, escogiendo $b = \frac{2}{e^\pi}$ y $a = -\frac{1}{e^\pi}$.

Puntaje.

a)	i)	0,5	conocer la definición de valor absolto
		0,5	argumento correcto
	ii)	1	aquí hay citar correctamente los teoremas que dicen que la suma y diferencia de funciones continuas es continua (0,5) y que el valor absoluto de una función continua es continuo, argumentando ya sea vía composición de funciones continuas o como resultado especial visto en clases (0,5)
b)	i)	0,5	por manejar el cambio de variables $y = \pi - x$
		0,5	por la propiedades necesarias de sin y manejar la expresión hasta llegar al límite conocido $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z}$
		0,5	la respuesta correcta
	ii)	1,5	mismo esquema de puntaje anterior
	iii)	0,8	por plantear las ecuaciones correctamente
		0,2	por los valores de a, b