Pauta Control Recuperativo MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** (2 ptos) Pruebe que $e^y > 1 + y$, $\forall y > 0$ y deduzca que $\ln(z+1) < z$, $\forall z > 0$. Note que las desigualdades son *estrictas*. Indicación: para probar la primera desigualdad eleve al cuadrado la ya conocida desigualdad para la función exponencial $e^x \geq 1 + x$, para $x \geq 0$ y luego haga el cambio de variables $y = 2x$.

(ii) Sea (a_n) la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \ln\sqrt{2a_n + 1},\ n \geq 0,\ a_0 > 0 \text{ dado.}$$

(a) (1 pto) Establezca que (a_n) está bien definida. Para ello pruebe que $a_n \geq 0$, $n \geq 0$.

(b) (1.5 ptos) Utilizando una conocida desigualdad para la función logaritmo natural, pruebe que (a_n) es monótona.

(c) (1.5 ptos) Deduzca que (a_n) es convergente. Calcule explícitamente su límite utilizando la desigualdad estricta deducida en la parte **(i)** de este problema.

Pauta.- **(i)** Comenzando por la desigualdad no estricta para la función exponencial:

$$\begin{aligned}
e^x \geq 1 + x,\ \forall x \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{2x} \geq (1+x)^2,\ \forall x \geq 0 \quad \text{(elevando al cuadrado)}\\
&\Rightarrow \quad e^{2x} \geq 1 + 2x + x^2,\ \forall x \geq 0 \quad \text{(cuadrado de binomio)}\\
&\Rightarrow \quad e^{y} \geq 1 + y + \frac{y^2}{4},\ \forall y \geq 0 \quad \text{(cambio de variable } y = 2x\text{)}\\
&\Rightarrow \quad e^{y} > 1 + y,\ \forall y > 0 \quad \text{(pues } y^2 > 0 \text{ si } y > 0\text{)}
\end{aligned}$$

llegamos a la primera desigualdad estricta buscada para la función exponencial.

Haciendo ahora el cambio de variables

$$w = e^y,\ \forall y > 0 \Leftrightarrow y = \ln w,\ \forall w > 1$$

obtenemos

$$w > 1 + \ln w,\ \forall w > 1$$

y haciendo ahora

$$z = w - 1$$

se tiene

$$\ln(z+1) < z, \forall z > 0$$

que era la desigualdad estricta que buscábamos para la función logaritmo.

Nota: existen otras metodologías para establecer la primera desigualdad que deben considerarse correctas. Por ejemplo, se puede argüir que, de la definición (o caracterización) de e^x, $x \geq 0$ como límite de la sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

se sabe que la sucesión es estrictamente creciente, por lo que para $n \geq 2$:

$$1 + x = \left(1 + \frac{x}{1}\right)^1 = a_1 < a_n \leq e^x.$$

(ii) **(a)** La sucesión está bien definida pues por inducción

$$\begin{array}{rcl} a_0 > 0 & & \text{(en particular } a_0 \geq 0\text{)} \\ a_n \geq 0 & \Rightarrow & 2a_n + 1 \geq 1 \\ & \Rightarrow & \sqrt{2a_n+1} \geq 1 \quad \text{(raíz bien definida)} \\ & \Rightarrow & \ln\sqrt{2a_n+1} \geq 0 \quad \text{(logaritmo bien definido)} \\ & \Rightarrow & a_{n+1} \geq 0. \end{array}$$

Nota: se puede probar también por inducción que $a_n > 0$, lo que es correcto.

(b) Veamos si (a_n) es monótona creciente o decreciente:

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} - a_n & = & \ln\sqrt{2a_n+1} - a_n \\ & = & \dfrac{1}{2}\ln(2a_n+1) - a_n \\ & = & \dfrac{1}{2}(\ln(2a_n+1) - 2a_n) \end{array}$$

Pero sabemos que

$$\ln(1+z) \leq z, \ \forall z \geq 0$$

de donde haciendo $z = 2a_n$ se deduce

$$a_{n+1} - a_n \leq 0$$

luego la sucesión es decreciente.

Nota: si se probó en la parte anterior que $a_n > 0$, también puede probarse usando la desigualdad de la parte **(i)**, que a_n es estrictamente decreciente, lo que es correcto. Sin embargo, si solamente se probó que $a_n \geq 0$ no se puede usar la desigualdad estricta de la parte **(i)**.

(c) La sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente por lo que es convergente, digamos a un real ℓ.

Tomando límite el la expresión para a_{n+1} y utilizando que:

- ⋄ a_{n+1} es una subsucesión de a_n y por lo tanto converge también a ℓ.
- ⋄ La función $\ln\sqrt{2x+1}$ es continua para $x \geq 0$ (composición de funciones continuas).

se obtiene la ecuación para ℓ

$$\ell = \ln \sqrt{2\ell + 1}$$

o de forma equivalente

$$2\ell = \ln(2\ell + 1).$$

Es evidente que $\ell \geq 0$, pues todos los términos de la sucesión son positivos (o estrictamente positivos).
Evidentemente $\ell = 0$ satisface la ecuación anterior.
Por otro lado $\ell > 0$ no puede satisfacerla, pues de la parte **(i)** (tomando $z = 2\ell$):

$$2\ell > \ln(2\ell + 1), \ \forall \ell > 0.$$

Entonces $\ell = 0$ es la única solución.

Puntaje:	**(i)**	**[1pto]**	Prueba de la desigualdad estricta para e^y
		[1pto]	Prueba de la desigualdad estricta para $\ln z$
	(iia)	**[1pto]**	Prueba de $a_n \geq 0$ y buena definición
	(iib)	**[1pto]**	Prueba del decrecimiento
		[0.5pto]	Conocimiento de la desigualdad no estricta para ln
	(iic)	**[0.2pto]**	Teorema de sucesiones monótonas
		[0.3pto]	Ecuación para ℓ
		[0.4pto]	Justificación de la ecuación para ℓ (subsucesión y continuidad)
		[0.2pto]	Observación de que $\ell \geq 0$
		[0.2pto]	Comprobar que $\ell = 0$ es solución
		[0.2pto]	Descarte de $\ell > 0$

P2.- Para la función definida por

$$f(x) = \frac{x^3}{1 - x^2}.$$

- **(i)** (1 pto) Encuentre su dominio, ceros y analice su paridad.
- **(ii)** (1 pto) Analice sus signos.
- **(iii)** (1 pto) Pruebe que es estrictamente creciente en $(0, 1)$.
- **(iv)** (1 pto) Encuentre asíntotas horizontales, verticales y oblícuas.
- **(v)** (1 pto) Demuestre que es sobreyectiva usando el TVI (Teorema del Valor Intermedio). ¿Por qué se puede aplicar este teorema?
- **(vi)** (1 pto) Dibuje un gráfico sintetizando los elementos del análisis precedente.

Pauta.- **(i)** Dominio: $I\!R \setminus \{-1, 1\}$. Ceros: $x = 0$. Paridad: impar ($f(x) = -f(-x)$).

(ii) Signos: para encontrar el conjunto donde f es positiva resolvemos la inecuación

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x^3}{1 - x^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x > 0 \text{ y } 1 - x^2 > 0) \text{ o } (x < 0 \text{ y } 1 - x^2 < 0) \\ &\Leftrightarrow \quad (x > 0 \text{ y } -1 < x < 1) \text{ o } (x < 0 \text{ y } ((x > 1) \text{ o } (x < -1)) \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < x < 1 \text{ o } x < -1 \end{aligned}$$

esto es f es positiva en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y negativa en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
Nota: como la función es impar, podría analizarse el signo sólo para $x > 0$ en el dominio menos los ceros y obtener luego la zona de positividad para $x < 0$ en el dominio menos los ceros como el opuesto del complemento.

(iii) Crecimiento: Para probar que f es estrictamente creciente, como x^3 es creciente en $(0, 1)$:

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^3, \ \forall x, y \in (0, 1)$$

del mismo modo en $(0, 1)$:

$$x < y \Rightarrow x^2 < y^2 \Rightarrow -x^2 > -y^2 \Rightarrow 1 - x^2 > 1 - y^2 \Rightarrow \frac{1}{1 - x^2} < \frac{1}{1 - y^2}$$

entonces multiplicando por x^3

$$x < y \Rightarrow \frac{x^3}{1 - x^2} < \frac{x^3}{1 - y^2} < \frac{y^3}{1 - y^2}.$$

Nota: no se pueden usar derivadas.

(iv) Por imparidad vemos solamente límites para $x > 0$. Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}} = -\infty$$

Por imparidad:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{1 - x^2} = +\infty$$

No hay.
Asíntotas verticales:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{1 - x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{1 - x^2} = +\infty$$

por imparidad

$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{1 - x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{1 - x^2} = -\infty$$

Luego hay asíntotas verticales en $x = -1$ y $x = 1$.
Asíntotas oblícuas:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \frac{x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1 - x^2} = -1$$

asíntota oblícua recta de pendiente -1

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{1 - x^2} - (-x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x - x^3}{1 - x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - x^2} = 0$$

que pasa por el origen. Por imparidad la otra asíntota oblícua cuando $x \to -\infty$ es la misma: $y = -x$.

(v) Epiyectividad: Claramente f es continua en $(-1,1)$ pues $1-x^2 \neq 0$ en ese intervalo y f es división de dos polinomios (función racional) donde el denominador no se anula.

Como $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x^3}{1-x^2} = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^3}{1-x^2} = +\infty$ entonces, dado $y \in \mathbb{R}$, existen puntos $x_1, x_2 \in (-1,1)$ tales que $f(x_1) < y$ y $f(x_2) > y$. Del TVI se deduce que existe un $x_0 \in (-1,1)$ tal que $f(x_0) = y$.

Nota: se puede entrar en más detalle en la demostración de la existencia de x_1 y x_2 a partir de la definición de límites infinitos, pero eso no se pide. Por ejemplo x_2 existe pues

$$(\forall M \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0) \text{ tal que } 1 - x < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

entonces con $M = y$ y tomando por ejemplo $x_2 = 1 - \delta/2$ tenemos que $f(x_2) > y$.

(vi) Gráfico:

Puntaje:

(i)	**[0.4pto]**	Dominio
	[0.2pto]	Ceros
	[0.4pto]	Paridad
(ii)	**[1pto]**	Resolución de la inecuación e intervalos $f > 0$
(iii)	**[1pto]**	Crecimiento
(iv)	**[0.2pto]**	Asíntotas horizontales
	[0.4pto]	Asíntotas verticales
	[0.4pto]	Asíntotas oblícuas
(v)	**[0.2pto]**	Justificación de que f es continua en $(-1,1)$
	[0.4pto]	Existencia de valores de f mayores y menores que y
	[0.4pto]	Aplicación del TVI
(vi)	**[1pto]**	Gráfico acorde al análisis previo

P3.- (i) (2 ptos) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $t = \tan(\alpha/2)$. Demuestre que $\sin\alpha = \dfrac{2t}{1+t^2}$. Exprese también las funciones $\cos(\alpha)$ y $\tan(\alpha)$ como cuociente de polinomios en la variable t.

(ii) Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\arctan x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 2\left(\dfrac{\exp(x/a) - 1}{x}\right) - a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) (2 ptos) Encuentre todos los valores de a para que la función f sea continua en todo $\mathbb{R}$. Justifique.

(b) (2 ptos) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ para los valores de a que encontró en la parte **(i)**.

Pauta.- **(i)** Hay varias maneras de demostar esta identidad. Una de ellas es partiendo de la identidad

$$\sin \alpha = \sin(\alpha/2 + \alpha/2) = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$$

de donde

$$\sin \alpha = 2 \tan(\alpha/2) \cos^2(\alpha/2)$$

y después usar la identidad

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta}$$

para obtener ($\beta = \alpha/2$)

$$\sin \alpha = 2 \frac{\tan(\alpha/2)}{1 + \tan^2(\alpha/2)} = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Para expresar de forma análoga $\cos \alpha$ podemos hacer como hicimos para $\sin \alpha$, esto es

$$\cos(\alpha) = \cos(\alpha/2 + \alpha/2) = \cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2) = \frac{1}{1 + t^2} - \frac{t^2}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

donde usamos la identidad conocida

$$\sin^2 \beta = \frac{\tan \beta}{1 + \tan^2 \beta}.$$

Otra forma es expresar

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4t^2}{(1 + t^2)^2}} = \frac{\sqrt{1 + t^4 + 2t^2 - 4t^2}}{1 + t^2} = \frac{\sqrt{(1 - t^2)^2}}{1 + t^2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Finalmente

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\dfrac{2t}{1 + t^2}}{\dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \frac{2t}{1 - t^2}.$$

(ii) (a) Claramente f es continua para $x > 0$ ya que $\arctan x$ es continua (inversa de función continua) y es división de dos continuas. Para $x < 0$ también f es continua por álgebra de funciones continuas.

Para la continuiudad en $x = 0$, verifiquemos primero que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\tan y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y\cos y}{\sin y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{y}{\sin y}\cos y = 1.$$

Ahora impongamos que

$$\lim_{x\to 0^-} 2\left(\frac{\exp(x/a)-1}{x}\right) - a = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{a}\left(\frac{\exp(x/a)-1}{x/a}\right) - a = \frac{2}{a} - a = 1$$

esto es

$$a^2 + a - 2 = 0$$

de donde los valores de a que hacen continua a f son

$$a = -2 \quad \text{o} \quad a = 1.$$

(b) Hay que calcular dos límites

$$\lim_{x\to -\infty} 2\left(\frac{\exp(-x/2)-1}{x}\right) + 2 = \lim_{y\to +\infty} -2\left(\frac{\exp(y/2)-1}{y}\right) + 2 = -\infty$$

pues $e^{y/2}/y \to +\infty$ si $y \to +\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} 2\left(\frac{\exp(x/2)-1}{x}\right) - 1 = \lim_{y\to +\infty} -2\left(\frac{\exp(-y)-1}{y}\right) - 1 = -1$$

pues $e^{-y} \to 0$ si $y \to +\infty$.

Puntaje:

(i)	**[1pto]**	Demostrar la expresión para $\operatorname{sen}\alpha$
	[0.6pto]	Expresar $\cos\alpha$
	[0.4pto]	Expresar $\tan\alpha$
(iia)	**[0.2pto]**	Continuidad para $x \neq 0$
	[0.4pto]	Límite de $\arctan x/x$
	[0.4pto]	Límite de exp
	[0.5pto]	Condición de continuidad
	[0.5pto]	Valores de a
(iib)	**[0.5pto]**	Primer límite
	[0.5pto]	Segundo límite

Atte., el profesor coordinador. Santiago, 7 agosto 2003.