Pauta Control Recuperativo MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

a) Dado $\alpha \in (0,1)$ se define la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ mediante la recurrencia

$$a_1 = \alpha \quad , \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \quad n \geq 1$$

i) Demuestre que $\forall n \geq 1 \quad , \quad 0 < a_n < 1$.

ii) Demuestre que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ converge y calcule su límite.

Solución (i): Demostraremos por inducción que $0 < a_n < 1 \quad \forall n \geq 1$.

- Para $n = 1$, $a_1 = \alpha \in (0,1)$, es decir $0 < a_1 < 1$.
- Sea $0 < a_n < 1$ algún $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- Por demostrar que $0 < a_{n+1} < 1$. **(0.3 ptos.)**

En efecto, por hipótesis $0 < a_n < 1 \Rightarrow 1 < 1 + a_n < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1+a_n}{2} < \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{\frac{1}{2}} < \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < \sqrt{1} = 1$$

Sigue que $0 < a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < 1$ **(0.7 ptos.)**

(ii) Como (a_n) es acotada, probaremos monotonia, especificamente que (a_n) es creciente (por inducción).

Demostraremos que $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \geq 1$.

- Para $n = 1$, por demostrar que $a_2 > a_1$ es decir
$\sqrt{\frac{1+a_1}{2}} > a_1 \Leftrightarrow \frac{1+a_1}{2} > a_1^2$ (pués $a_1 > 0$)$\Leftrightarrow 2a_1^2 - a_1 - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (2a_1 + 1)(a_1 - 1) < 0$ lo que se cumple pués $0 < a_1 = \alpha < 1$
- Sea $a_{n+1} > a_n$ algún $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
- Por demostrar que $a_{n+2} < a_{n+1}$ **(1.0 pto.)**

En efecto $a_{n+2} > a_{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+a_{n+1}}{2}} > \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} \overset{(\ )^2}{\Leftrightarrow} \frac{1+a_{n+1}}{2} > \frac{1+a_n}{2} \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ que es la hipótesis.

Así $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada y creciente y por lo tanto convergente.

Sea $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$, entonces, tomando límite de la recurrencia queda

$\lim a_{n+1} = \lim \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} = \sqrt{\lim \frac{1+a_n}{2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{1+L}{2}} \Rightarrow 2L^2 - L - 1 = 0 \Rightarrow L = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} \begin{smallmatrix} \nearrow 1 \\ \searrow -1/2 \end{smallmatrix}$

pero $L > 0$. Así $\lim \ a_n = 1$ **(1.0 pto.)**

b) Calcule, si existen, los siguientes límites y en caso de no existir fundamente su respuesta.

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n \ \mathrm{sen}(e^n)}{n^3+5\sqrt{n}}$. En este caso, las sucesiones definidas por $(-1)^n$ y $\mathrm{sen}(e^n)$ son divergentes, pero acotadas.

Además, la sucesión definida por $\frac{n}{n^3+5\sqrt{n}} \to 0$, es decir, es nula.

De modo que $\frac{(-1)^n \ n \ \mathrm{sen}(e^n)}{n^3+5\sqrt{n}}$ equivale al producto de una sucesión nula por acotadas y por lo tanto es nula.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \ n \ \mathrm{sen}(e^n)}{n^3+5\sqrt{n}} = 0$ **(1.0 pto.)**

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right]^n$. Puede recurrirse a subsucesiones.

Así, la subsucesión de los pares es $\left[(-1)^{2n} + \frac{1}{2n}\right]^{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \to e$ y la de los impares $\left[(-1)^{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\right]^{2n+1} = \quad -1 + \frac{1}{2n+1} \quad ^{2n+1} = (-1)^{2n+1}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right]^{2n+1} = -1 \quad 1 - \frac{1}{2n+1} \quad ^{2n+1} \to -1/e$

Sigue que, al encontrar dos subsucesiones que convergen, pero a límites distintos, provocan la divergencia de la sucesión original.

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left[(-1)^n + \frac{1}{n}\right]^n$ no existe. **(1.0 pto.)**

iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+k}\right)}$

Según la indicación

$\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+n} < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} = \frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \ldots + \frac{n}{n+n} < \frac{1+2+3+\ldots+n}{n+1}$

Como $1 + 2 + \ldots + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ queda $\frac{n}{4} < \frac{n(n+1)}{2\cdot 2n} < \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} < \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{n}{2}$

Sigue que $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{4}} = \sqrt[n]{\frac{n}{4}} < \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+k}\right)} < \sqrt[n]{\frac{n}{2}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2}}$

Como $\sqrt[n]{n} \to 1$, $\sqrt[n]{2} \to 1$ y $\sqrt[n]{4} \to 1$, Por Teorema del Sandwich se concluye que

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n+k}\right)} = 1$ **(1.0 pto.)**

Problema 2

a) Considere la función

$$f(x)\begin{cases}\frac{(e^{\alpha x}-1)\cos(\pi x)}{\pi \operatorname{sen} x} & \text{si } x<0\\ 1 & \text{si } x=0\\ \frac{ln(1+2x)}{(\beta+1)x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

i) Encuentre los valores de α y β en $\mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x=0$.
Recurriendo a los límites laterales

$$\lim_{x\to 0^-} = \lim_{x\to 0^-}\frac{(e^{\alpha x}-1)\cos(\pi x)}{\pi \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}\cdot\frac{\cos(\pi x)}{\pi\frac{\operatorname{sen} x}{\alpha x}}\Bigg)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\lim\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}\cdot\frac{\cos(\pi x)}{(\operatorname{sen} x/x)} = \frac{\alpha}{\pi}\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = \frac{\alpha}{\pi} \qquad \textbf{(0.7 ptos.)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+2x)}{(\beta+1)x} = \frac{1}{\beta+1}\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+2x)}{2x}\cdot 2 = \frac{2}{\beta+1}\lim_{x\to 0^+}\frac{ln(1+2x)}{2x} = \frac{2}{\beta+1}\cdot 1$$

Para la continuidad en $x=0$ debe cumplirse que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, es decir $\frac{\alpha}{\pi}=1$ y $\frac{2}{\beta+1}=1$ de donde $\alpha=\pi$ y $\beta=1$ **(0.8 ptos.)**

ii) Explique porque f no es continua en $\mathbb{R}$.
En particular, en $\mathbb{R}^-$, f es discontinua en el conjunto $A=\{x\in\mathbb{R}^-/x=-k\pi, k\in\mathbb{Z}^+\}$ en donde se anula $\operatorname{sen} x$ **(0.5 ptos.)**

iii) Usando los valores de α y β encontrados en (i), demuestre que $\exists x_0\in[-1,0]$ tal que $f(x_0)=0$.
En efecto, en $[-1,0]$ f es de la forma $f(x)=\frac{(e^{\pi x}-1)\cos(\pi x)}{\pi\operatorname{sen} x}$ en donde todos sus términos son continuos y $\operatorname{sen} x$ no se anula en $[-1,0)$.
Además $f(0)=1$ por definición y $f(-1)=\frac{(e^{-\pi}-1)\cos(-\pi)}{\pi\operatorname{sen}(-1)}=\frac{(e^{-\pi}-1)(-1)}{-\pi\operatorname{sen}(1)}$ es decir
$f(-1)=\frac{e^{-\pi}-1}{\pi\operatorname{sen}(1)}=\frac{1-e^{\pi}}{\pi e^{\pi}\operatorname{sen}(1)}<0$ **(1.0 pto.)**
De modo que f es continua en $[-1,0]$ y $f(-1)\cdot f(0)<0$.
Entonces, por Teorema del Valor Intermedio, existe $x_0\in[-1,0]$ tal que
$f(x_0)=0$ **(0.5 ptos.)**

iv) ¿ Es posible que f tenga una cero en $\mathbb{R}^+$?. Explique
f en $\mathbb{R}^+$ toma la forma $f(x)=\frac{ln(1+2x)}{(\beta+1)x}=\frac{ln(1+2x)}{2x}$ en donde $ln(1+2x)>0$ y $2x>0$ en $\mathbb{R}^+$, es decir,$f(x)>0\quad\forall x\in I\!R^+$.
Sigue que f no cambia de signo en $\mathbb{R}^+$ y por lo tanto no se anula en $\mathbb{R}^+$.
Así: No es posible que f tenga un cero en $\mathbb{R}^+$. **(0.5 ptos.)**

b) Considere las funciones $f(x)=e^x-e^2$ y $g(x)=\cot(x-2)$

i) Que sucede con $f(x)$ y $g(x)$ cuando $x\to 2$.
Claramente $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}(e^x-e^2)=e^2-e^2=0$ y
$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\cot(x-2)=\lim_{x\to 2}\frac{\cos(x-2)}{\operatorname{sen}(x-2)}\to\pm\infty$, es decir, diverge. **(0.5 ptos.)**

ii) Calcule $\lim_{x\to 2}(f(x)g(x))$ (Ind.: divida por e^2 y haga ajustes)
$\lim_{x\to 2}(f(x)g(x))=\lim_{x\to 2}(e^x-e^2)\frac{\cos(x-2)}{\operatorname{sen}(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{e^2(e^{x-2}-1)\cos(x-2)}{\operatorname{sen}(x-2)}$ **(0.5 ptos.)**
$=e^2\lim_{x\to 2}\frac{e^{x-2}-1}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\operatorname{sen}(x-2)}\cos(x-2)$ en que si $x-2=y\Rightarrow y\to 0$ si $x\to 2$
Así $\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=e^2\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\frac{y}{\operatorname{sen} y}\cos y=e^2\cdot 1\cdot 1\cdot 1=e^2$
$\therefore \lim_{x\to 2}(f(x)g(x))=e^2$ **(1.0 pto.)**

Problema 3

Dada la función $f(x) = ln(1 + e^x)$ se pide estudiarla determinando:

i) Dominio, ceros (si existen), intersección eje OY, continuidad.

ii) Asíntota horizontal calculando $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

Asíntota ablicua (Ind.: Puede usar, donde corresponda que $ln(1 + e^x) < ln(2e^x)$ si $x > 0$ y Teo. Sandwich.)

iii) Crecimiento y Recorrido.

iv) Encuentre la función inversa $f^{-1} : A \to B$ indicando A, B y la ecuación de $f^{-1}(x)$. Bosqueje ambas curvas.

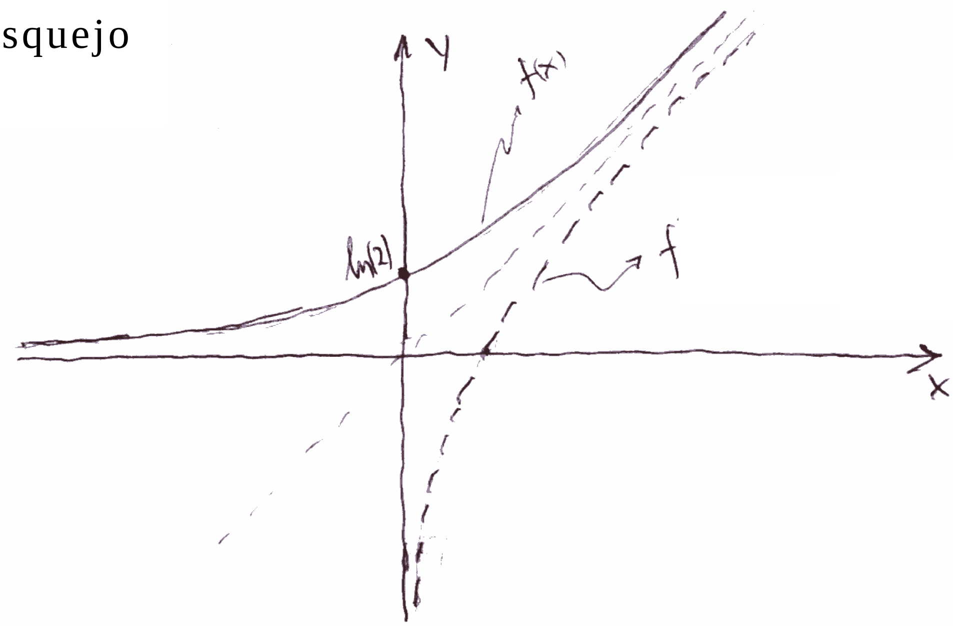
i) Dominio: $1 + e^x$ está definido $\forall x \in \mathbb{R}$ y $1 + e^x > 1$ de modo que $ln(1 + e^x)$ está definida $\forall x \in \mathbb{R}$
Dom $f : \mathbb{R}$
Ceros: $f(x) = 0$ si $ln(1 + e^x) = 0$ si $1 + e^x = 1$ si $e^x = 0$, que es una igualdad imposible
$\therefore f$ no tiene ceros. **(0.5 ptos.)**
$\cap$ eje OY: Si $x = 0, \;\; y = ln(1 + e^0) = ln2$. Entonces $\cap$ eje OY es $(0, ln2)$
Continuidad: e^x es continua, $1 + e^x$ es continuay lnx es continua.
Como la composición es continua, $f(x) = ln(1 + e^x)$ es continua $\forall x \in R$ **(0.5 ptos.)**

ii) Asíntota horizontal $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} ln(1 + e^x)$. Como $e^x \to 0$ si $x \to -\infty$ y por la continuidad de $ln, ln(1 + e^x) \to ln(1 + 0) = 0$.
Así, $y = 0$, es decir el eje OX, es asíntota horizontal. **(0.5 ptos.)**
Asíntota oblicua es de la forma $y = mx + n$ en que $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+e^x)}{x}$
Acotando $1 = \frac{ln(e^x)}{x} < \frac{ln(1+e^x)}{x} < \frac{ln(2e^x)}{x} = \frac{ln2+lne^x}{x} = \frac{ln2+x}{x}$.
Por Teorema del sandwich $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ln(1+e^x)}{x} = 1$ **(0.8 ptos.)**
Para n se tiene $n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} [ln(1 + e^x) - x]$
$= \lim_{x\to\infty} [ln(1 + e^x) - \overbrace{lne^x}^{x}] = \lim_{x\to\infty} ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)$.
Pero $\frac{1+e^x}{e^x} \to 1$ cuando $x \to \infty$ y por continuidad de ln.
$ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) \to ln(1) = 0$
Así $n = 0$ con lo cual $y = x$ es asíntota oblicua. **(0.7 ptos.)**

iii) Crecimiento:
Se sabe que e^x es estrict. creciente, $e^x + 1$ es estric. creciente y lnx es estric. creciente. Además la composición de funciones crecientes es creciente, de modo que $f(x) = ln(1 + e^x)$ es estrictamente creciente. **(0.5 ptos.)**
Recorrido: f tiene por asíntota horizontal $y = 0$ y además es estrictamente creciente, de modo que Rec $f : \mathbb{R}^+$ **(0.5 ptos.)**

iv) Inversa: f está definida en $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, de modo que $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, además
$f \circ f^{-1} = id_{\mathbb{R}+} = x$
Sigue que $ln(1 + e^{f^{-1}}) = x \Rightarrow 1 + e^{f^{-1}} = e^x \Rightarrow e^{f^{-1}} = e^x - 1$
de modo que $\boxed{f^{-1}(x) = ln(e^x - 1)}$ **(1.0 pto.)**

Bosquejo



(1.0 pto.)