Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 23 de Noviembre del 2000.

PAUTA EXAMEN 1

MA12A CALCULO 2000

Problema 1. Para la asignación $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - x$ se pide

a) (1.0 pto.) Determinar dominio y paridad.
Dominio: Hay que determinar para que x el cuociente $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Los signos de $1+x$ y $1-x$ sólo coinciden en $(-1,1)$ Luego $\operatorname{dom}(f) = (-1,1)$. La función es impar pues $f(-x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + x = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + x = -f(x)$

b) (1.0 pto.) Calcular f' y analizar crecimiento.
Para calcular la derivada se separa el ln y queda $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) - 1 = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \frac{x^2}{1-x^2}$. La derivada es positiva en el dominio de modo que la función es estrictamente creciente en él.

c) (1.0 pto.) Encontrar las asíntotas verticales.
Cuando $x \to 1^-$ el término $\ln(1-x)$ diverge a menos infinito, de modo que la función diverge a más infinito, con lo que posee una asíntota vertical de ecuación $x = 1$. Además, cuando $x \to -1^+$ el término $\ln(1+x)$ diverge a menos infinito por lo que la función también diverge a menos infinito. Entonces f tiene una asíntota vertical en $x = -1$.(directo de la imparidad).

d) (1.0 pto.) Calcular f'' y analizar convexidad.
La segunda derivada está dada por $f''(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. Para $x > 0$, f'' es positiva de modo que la función es estrictamente convexa y por imparidad o notando que f'' es negativa para $x < 0$ se concluye que f es estrictamente cóncava en $(-1,0)$. Tiene un punto de inflexión en cero (no preguntado).

e) (1.0 pto.) Determinar si $I = \int_0^1 f(x)\,dx$ existe y en tal caso calcularla.
La función se puede escribir como $f(x) = \frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x)) - x$. El único término que no es continuo en 1 es $\ln(1-x)$. Se tiene que

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+x) - \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1-x) - \frac{1}{2}$$

Como $\int_0^1 \ln(1+x) = \int_1^2 \ln(x) = x(\ln(x) - 1)]_1^2 = 2(\ln(2) - 1) + 1 = 2\ln(2) - 1$ y $\int_0^1 \ln(1-x) = \int_0^1 \ln(x) = x(\ln(x) - 1)]_0^1 = -1 - \lim_{x\to 0} x(\ln(x) - 1)$. El $\lim_{x\to 0} x(\ln(x) - 1) = \lim_{x\to 0} x\ln(x) = 0$, por un conocimiento de cátedra o por un análisis de L'hôpital. Luego, $I = \ln(2) - \frac{1}{2}$

f) (1.0 pto.) Expresar $f(x)$ como una serie de potencias. Como $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 = \sum_{k\geq 0} x^{2k} - 1 = \sum_{k\geq 1} x^{2k}$.
Al integrar encontramos que una primitiva de f' es $g(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$. Como $f(0) = 0$ se deduce que $g(x) = f(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

Problema 2. Para $n \in \mathbb{N}$, se define $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}(x))^n \, dx$. .

a) (2.0 pts.) Calcular I_0, I_1 y demostrar la recurrencia $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$, para $n \in \mathbb{N}$.
$I_0 = \frac{\pi}{2}$ y $I_1 = -\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. $I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n+2}(x)\, dx$. Integrando por partes, con $u = \operatorname{sen}^{n+1}(x)$ y $v' = \operatorname{sen}(x)$ se obtiene $I_{n+2} = -\cos(x)\operatorname{sen}^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\operatorname{sen}^n(x)\cos^2(x)$. El primer término es cero y el como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ se tiene que $I_{n+2} = (n+1)(I_n - I_{n+2})$. Despejando I_{n+2} se obtiene lo deseado.

b) (1.0 pto.) Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} \leq I_n$.
Para $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ la función $\operatorname{sen}(x) \geq 0$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{sen}^{n+1}(x) \leq \operatorname{sen}^n(x)$. Aplicando la monotonía de la integral de concluye.

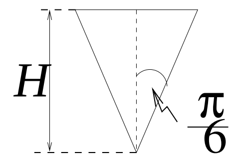
c) (1.0 pto.) Demostrar que $\lim \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$. Como $I_n > 0$ y decreciente, tenemos que $I_{2n+1} \leq I_{2n}$ y $I_{2n} \leq I_{2n-1}$. Entonces, $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$. Aplicando Sandwich se concluye.

d) (1.0 pto.) Demostrar que $I_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$ y $I_{2n+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}$. Aplicamos una inducción, que se verifica fácilmente para I_0 e I_1. En el paso inductivo hay que notar que $I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} I_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n+2)!}{(2n+2)^2(2^n n!)^2} = \frac{\pi}{2}\frac{(2(n+1))!}{(2^{n+1}(n+1)!)^2}$. Análogamente,
$I_{2n+3} = \frac{2n+2}{2n+3}\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{(2n+2)^2(2^n n!)^2}{(2n+3)(2n+2)!} = \frac{\left(2^{n+1}(n+1)!\right)^2}{(2n+3)(2(n+1))!}$.

e) (1.0 pto.) Demostrar que $\lim \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\sqrt{2n+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
Como $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}}{\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)(2n)!}} = \frac{\pi}{2}(2n+1)\frac{((2n)!)^2}{(2^n n!)^4} \to 1$ entonces $\sqrt{2n+1}\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \to \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Problema 3.

Considerar un cono lleno de agua, de ángulo basal $\frac{\pi}{6}$ y altura H como muestra la figura. Se desea determinar el radio R de una esfera que al ser sumergida lo más posible en el cono, desplace el máximo de agua.



a) (2.0 pts.) Para $x_0 \in [-R, R]$ demostrar que el volumen del trozo de esfera obtenido al rotar la región $A = \left\{(x,y) : x_0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}\right\}$ en torno al eje OX es $V = \frac{\pi}{3}(R - x_0)(2R^2 - Rx_0 - x_0^2)$.
El volumen pedido es $V = \pi \int_{x_0}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2$. La $\int R^2 = R^2 x$ y $\int x^2 = \frac{x^3}{3}$. Luego $V = \pi R^2 (R - x_0) - \frac{\pi}{3}(R^3 - x_0^3) = \pi (R - x_0)\left(R^2 - \frac{(R^2 + Rx_0 + x_0^2)}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(R - x_0)(2R^2 - Rx_0 - x_0^2)$

b) (2.0 pts.) Demostrar que el volumen de agua desplazado por una esfera de radio R es

$$V(R) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi R^3 & \text{si } R < \frac{H}{3} \\ \frac{\pi}{3}(H - R)^2 (4R - H) & \text{si } \quad R \in \left[\frac{H}{3}, \frac{2H}{3}\right] \end{cases}$$

Cuando la esfera se sumerge lo más posible queda en contacto con el manto del cono. Este contanto es tangente para todo $R \leq \frac{2H}{3}$. El extremo superior corresponde a la situación en que la esfera es tangente al cono en el borde superior de este. Si $R < \frac{H}{3}$ la esfera queda completamente sumergida y por ende el volumen desplazado es $\frac{4}{3}\pi R^3$. Cuando $R \in \left[\frac{H}{3}, \frac{2H}{3}\right]$ es centro de la esfera, la punta del cono y el punto de tangencia forman un triángulo rectángulo, recto en el punto de tangencia. Como el ángulo basal del cono es $\frac{\pi}{6}$, podemos deducir que la hipotenusa de este triángulo es $2R$. El volumen de agua desplazado es el volumen de la parte de la esfera que queda sumergida. Este corresponde al volumen de rotación de la parte anterior para $x_0 = 2R - H$. Reemplazando, se obtiene

$$\begin{aligned} V(R) &= \frac{\pi}{3}(R - (2R - H))\left(2R^2 - R(2R - H) - (2R - H)^2\right) \\ &= \frac{\pi}{3}(H - R)\left(5RH - 4R^2 - H^2\right) = \frac{\pi}{3}(H - R)^2 (4R - H) \end{aligned}$$

c) (2.0 pts.) Encontrar el máximo global de la función $V(R)$ en $\left[0, \frac{2H}{3}\right]$.
Claramente $V(R)$ es creciente en $\left[0, \frac{H}{3}\right]$ con valor máximo $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^3$. Además, $\frac{\pi}{3}\left(\frac{2}{3}H\right)^2 \frac{1}{3}H = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{H}{3}\right)^3$, de modo que el máximo hay que buscarlo en $\left[\frac{H}{3}, \frac{2H}{3}\right]$. La función V es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $V'(R) = \frac{\pi}{3}\left((4)(H - R)^2 - 2(H - R)(4R - H)\right) = \frac{\pi}{3}(H - R)(4H - 4R - 8R + 2H) = 2\pi (H - R)(H - 2R)$.
Para $R \in \left[\frac{H}{3}, \frac{H}{2}\right]$ $V'(R) > 0$ de modo que V es creciente en $\left[\frac{H}{3}, \frac{H}{2}\right]$. Para $R \in \left[\frac{H}{2}, \frac{2H}{3}\right]$, $V'(R) < 0$ luego V es decreciente en $\left[\frac{H}{2}, \frac{2H}{3}\right]$. Entonces el máximo es $R = \frac{H}{2}$.