Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 3 de Diciembre del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA EXAMEN
MA12A CALCULO 2001

Problema 1.

(a) (2.0 pts.) Pruebe por integración que la superficie de un cono (manto y base) de altura h y base circular de radio r está dada por
$$S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2.$$

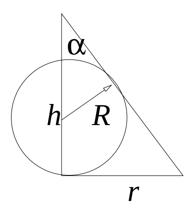
(b) (1.0 pto.) Considere la esfera de radio $R > 0$ y el cono de altura h y base circular de radio r circunscrito a la esfera como se muestra en la figura. Pruebe que
$$\frac{h-R}{R} = \frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}.$$

(c) (3.0 pts.) Determine las dimensiones (h y r) del cono de superficie (manto y base) mínima circunscrito a la esfera de radio $R > 0$ fijo. Indique el valor de esta superficie.

Sol.:

(a) Debemos demostrar que el área del manto del cono es $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$. Para ello podemos rotar la recta $y = \frac{r}{h}x$ en torno al eje OX en el intervalo $[0,h]$ o rotar la recta $y = -\frac{h}{r}(x-r)$ en torno al eje OY en el intervalo $[0,r]$ (**1.0 pto.**). El cálculo nos entrega respectivamente
$$M = 2\pi\int_0^h \frac{r}{h}x\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}} = 2\pi\frac{r}{h}\sqrt{1+\frac{r^2}{h^2}}\frac{h^2}{2} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$$
o
$$M = 2\pi\int_0^r x\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}} = 2\pi\frac{r^2}{2}\sqrt{1+\frac{h^2}{r^2}} = \pi r\sqrt{h^2+r^2}$$
(**1.0 pto.** por el cálculo).

(b) Para deducir la fórmula pedida debemos considerar la geometría de la figura. En ésta se tiene claramente que $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{R}{h-R} = \frac{r}{\sqrt{r^2+h^2}}$ (**1.0 pto.**)



(c) El área del manto vale
$$S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}+\pi r^2 \tag{1}$$
La ecuación de la parte (b) relaciona las variables h y r. Despejando una de ellas en términos de la otra, obtendremos S como función de una sola variable. Elevando al cuadrado se tiene que $R^2\left(r^2+h^2\right) = r^2(h-R)^2$. Lo más fácil es despejar r^2 en términos de h.
$$r^2 = \frac{R^2h^2}{(h-R)^2-R^2} = \frac{R^2h^2}{h(h-2R)} = \frac{R^2h}{h-2R} \qquad \textbf{(0.5 pts.)} \tag{2}$$
Reemplazando lo anterior directamente en la ecuación (**??**) se obtiene que $S(h) = \pi R\frac{h^2}{h-2R}$. También es posible usar la ecuación de la parte (b) en la forma $r\sqrt{r^2+h^2} = r^2\frac{(h-R)}{R}$ para obtener
$$S = \frac{\pi}{R}r^2h \tag{3}$$

pts.). En nuestro problema, la función $S(h)$ está definida en $(2R,\infty)$ y allí es derivable por ser el cuociente de los polinomios h^2 y $h-2R$, y esta última es positiva en este intervalo. Calculemos $S'(h)$

$$S'(h)=\pi R\frac{2h(h-2R)-h^2}{(h-2R)^2}=\pi R\frac{h^2-4hR}{(h-2R)^2}=\pi R\frac{h(h-4R)}{(h-2R)^2}\qquad (\mathbf{0.5\ pts.})$$

Como $S'(h)>0$ en $(4R,\infty)$ y $S'(h)<0$ en $(2R,4R)$ tenemos que $S(h)$ decrece en $(2R,4R)$ y crece en $(4R,\infty)$ (**0.5 pts.**). Por lo tanto, $S(h)$ tiene su mínimo global para $h_0=4R$ (**0.5 pts.**). Usando la ecuación (**??**), el radio correspondiente es $r_0=R\sqrt{\frac{4R}{4R-2R}}=\sqrt{2}R$ (**0.25 pts.**). Finalmente, la superficie del cono mínimo es $\overline{S}=\pi R\frac{16R^2}{4R-2R}=8\pi R^2$ (**0.25 pts.**).

Problema 2.

(a) (2.0 pts.) Estudie convergencia absoluta y condicional de las siguientes series:
(i) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$. (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-\cos(1/n))}{1/n}$. Ind.: compare con $\sum_{n=1}^{+\infty}1/n$.

(b) (2.0 pts.) Demuestre que $\int_0^1\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}dx$ converge.

(c) (2.0 pts.) Demuestre que $\int_1^{+\infty}x^{-1/2}\cos(x)dx$ converge. Ind.: utilice integración por partes.

Sol.:

(a) (i) **Convergencia absoluta**: definamos $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ para $x\geq 1$ de modo que $f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2}$ y en consecuencia $f'(x)\leq 0$ si $x\geq e$. Luego, $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[e,\infty)$ y por lo tanto se puede usar el criterio integral. Tenemos que $\sum\frac{\ln(n)}{n}$ converge $\Leftrightarrow \int_1^\infty\frac{\ln(x)}{x}dx$ converge; pero

$$\begin{aligned}\int_1^\infty\frac{\ln(x)}{x}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\ln(t)}{t}dt=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln^2(t)}{2}\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2(x)}{2}=+\infty.\end{aligned}$$

Así, $\sum\frac{\ln(n)}{n}$ no converge, de donde $\sum(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ no converge absolutamente (**0.5 pts.**).
Convergencia condicional: como $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ es decreciente para $x\geq e$ y además $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, entonces la serie $\sum(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ admite el criterio de Leibnitz y por lo tanto converge, pero no absolutamente, o sea converge condicionalmente (**0.5 pts.**).

(ii) Esta es una serie de términos positivos ya que $\forall n\geq 1$, $1/n\in(0,1)\subseteq(0,\frac{\pi}{2})$ y $\cos x<1$ para $x\in(0,\frac{\pi}{2})$. Usando la indicación, comparamos $\sum\frac{1-\cos(1/n)}{1/n}$ con $\sum 1/n$ vía cuociente:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1-\cos(1/n)}{1/n}}{1/n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\cos(1/n))}{1/n^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))}{x^2}=\frac{1}{2}$$

Como la serie armónica $\sum\frac{1}{n}$ diverge, la serie a estudiar es divergente (**1.0 pto.**).

(b) Esta es una integral impropia de 2da. especie en 0, busquemos $\alpha>0$ tal que $f(x)=\frac{x^\alpha\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}$ sea convergente si $x\to 0^+$ (**0.5 pts.**). Pero $f(x)=\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2-\alpha}}$, y claramente $f(x)\to L>0$ cuando $x\to 0^+$ si $3/2-\alpha=1$, o sea si $\alpha=1/2$ (**0.5 pts.**).

Por lo tanto $\int_{0+}^1\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x^{3/2}}$ tiene el mismo comportamiento que $\int_{0+}^1\frac{1}{\sqrt{x}}$ (**0.5 pts.**), pero esta última es conocidamente convergente (es de la forma $\int_{0+}^1\frac{1}{x^\alpha}$ con $\alpha<1$) (**0.5 pts.**).

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^{1/2}}dt$$

$$u = t^{-1/2} \quad du = -1/2t^{-3/2}dt$$
$$dv = \cos t dt \quad v = \text{sen}t \qquad (\mathbf{0.5pts.})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{\text{sen}x}{\sqrt{x}} - \text{sen}(1)) + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\text{sen}t}{t^{3/2}}dt$$

$$= -\text{sen}(1) + \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\text{sen}t}{t^{3/2}}dt}_{= \int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x^{3/2}}dx} \qquad (\mathbf{0.5pts.})$$

Pero $|\frac{\text{sen}x}{x^{3/2}}| \leq \frac{1}{x^{3/2}}$ (**0.5 pts.**), luego la integral impropia $\int_1^{\infty} \frac{\text{sen}x}{x^{3/2}}dx$ converge absolutamente. Con esto $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ converge y además

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = -\text{sen}(1) + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\text{sen}x}{x^{3/2}}dx \qquad (\mathbf{0.5pts.})$$

Problema 3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt & \text{si } x \neq 0 \\ -2\alpha e & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

donde $\alpha = \int_0^1 e^{-z^2}dz$ es un valor conocido.

(a) (1.2 pts.) Pruebe que f es par, encuentre los ceros de f y estudie su continuidad para $x \neq 0$.

(b) (1.2 pts.) Demuestre que $\lim_{x\to 0^+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt = -2\alpha e$ y concluya que f es continua en $x = 0$. Ind.: Haga $z = \sqrt{1+t}$.

(c) (1.2 pts.) Calcule $f'(x)$ y $f''(x)$ para $x > 0$, y estudie crecimiento y convexidad para $x > 0$.

(d) (1.2 pts.) Demuestre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2e\left(\sqrt{\pi}/2 - \alpha\right)$, sabiendo que $\int_0^{+\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}/2$.

(e) (1.2 pts.) Bosqueje el gráfico de f en $\mathbb{R}$, indicando su recorrido, mínimos y máximos.

<u>Sol.</u>:

(a) <u>f es par</u>: $f(-x) = \int_0^{(-x)^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt = \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt = f(x)$ (**0.3 pts.**).

<u>Ceros</u>: tenemos que $0 = f(x) = \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}dt \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ (**0.4 pts.**).

<u>Continuidad para $x \neq 0$</u>: la función $h(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}}$ es continua para $t > -1$. Si $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > -1$. Entonces

$$f(x) = \int_0^{r(x)} h(t)dt \text{ con } r(x) = x^2 - 1$$

Así f es la <u>composición</u> de dos funciones continuas: la función $\int_0 h(t)dt$ continua con respecto a $r > -1$ por el TFC y la función $r(x)$ continua para $x \in \mathbb{R}$ (**0.5 pts.**).

(b) Tomando $z = \sqrt{1+t}$ tenemos que $t = 0 \Rightarrow z = 1$, $t = x^2 - 1 \Rightarrow z = x$, $t = z^2 - 1 \Rightarrow dt = 2zdz$ (**0.4 pts.**), de modo que

$$\lim_{x \to 0+} \int_0^{x^2-1} \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t}} dt = \lim_{x \to 0+} \int_1^x \frac{e^{-z^2+1}}{z} 2zdz = -2e \lim_{x \to 0+} \int_x^1 e^{-z^2} dz = -2e \int_0^1 e^{-z^2} dz = -2e\alpha$$

Aquí la función e^{-z^2} es integrable (continua) en [0,1] por lo que $g(x) = \int_x^1 e^{-z^2} dz$ es continua en [0,1] y en particular en $x = 0$ por el TFC (**0.4 pts.**).

Como $\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x)$ pues f es par (**0.4 pts.**), entonces $\lim_{x \to 0} f(x) = -2e\alpha = f(0) \Rightarrow f$ es continua en $x = 0$.

(c) Sea $x > 0$. Por el TFC y la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{-(x^2-1)}}{\sqrt{1+(x^2-1)}} 2x \\ &= \frac{2xe^{-x^2+1}}{\sqrt{x^2}} \\ &= 2e^{-x^2+1} \quad (\textbf{0.3pts.}) \end{aligned}$$

De aquí se tiene que

$$f''(x) = 2e^{-x^2+1}(-2x) = -4xe^{-x^2+1} \quad (\textbf{0.3pts.})$$

Como claramente $f'(x) > 0$ para todo $x > 0$, se tiene que f es creciente en el intervalo $(0, \infty)$ (**0.3 pts.**). Por otra parte, $f''(x) < 0$ para todo $x > 0$, de modo que f es cóncava en el intervalo $(0, \infty)$ (**0.3 pts.**).

(d) Podemos utilizar el cambio de varible $z = \sqrt{1+t}$ de la parte (b) para tener que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{e^{-z^2+1}}{z} 2zdz \quad (\textbf{0.4pts.}) \\ &= 2e \lim_{x \to +\infty} \int_1^x e^{-z^2 dz} \\ &= 2e \lim_{x \to +\infty} \left(\int_0^x e^{-z^2} dz - \int_0^1 e^{-z^2 dz} \right) \quad (\textbf{0.4pts.}) \\ &= 2e\left(\int_0^\infty e^{-z^2} dz - \int_0^1 e^{-z^2 dz} \right) \\ &= 2e\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \alpha \right) \quad (\textbf{0.4pts.}) \end{aligned}$$

(e) Máximos: no tiene (**0.2 pts.**).

Mínimo global en $x = 0$ (**0.2 pts.**).

Recorrido: $[-2\alpha e, \sqrt{\frac{\pi}{2}} - \alpha[$ (**0.3 pts.**).

Gráfico: claramente $\alpha > 0 \Rightarrow f(0) = -2\alpha e < 0$, y tiene una asíntota horizontal en $y = 2e(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \alpha) > 0$ (**0.5 pts.** por el gráfico).