U. DE CHILE

INGENIERIA

# Pauta Examen MA12A Cálculo

**Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.**

**Año 2002**

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Una copia de este documento en formato ps o pdf puede obtenerse en:

`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html`.

**NOTA:** Otros métodos de solución de los que aparecen en esta pauta y otras asignaciones de puntaje en casos particulares, se vieron directamente y caso por caso en la corrección con los ayudantes. Ésta estuvo supervisada por el profesor coordinador.

**P1.-**

**(i)** (2 pto) Encuentre el **radio** de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\, x^n.$$

**(ii)** (2 pto) Encuentre el **intervalo** de convergencia de la serie de potencias:

$$\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{x^n}{n}.$$

**(iii)** (2 pto) Sea

$$f(x) = \int_0^{h(x)} g(t)\, dt,$$

con $g : I\!R \to I\!R$ una función continua con $g(x) > 0$, $\forall x \in I\!R$ y $h : I\!R \to I\!R$ una función derivable en $I\!R$. Calcule $f'$ y demuestre la equivalencia siguiente:

$$f \text{ es creciente} \Leftrightarrow h \text{ es creciente.}$$

## Pauta P1.-

**(i)** Podemos utilizar el test del cociente ($\frac{1}{R} = \lim |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ si el límite existe).

$$a_n = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}, \qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(n+1)!}\,\frac{n!}{(n+1)^{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e,$$

luego el radio de convergencia es $R = \frac{1}{e}$.

**(ii)** Se sabe que el radio de convergencia $R$ de una serie $\Sigma a_n x^n$ es tal que

$$\frac{1}{R} = \limsup_n \sqrt[n]{|a_n|}$$

entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_n \left( \left| \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n} \right| \right)^{1/n} \\ &= \limsup_n \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim_n \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de donde $R = 2$.

Analicemos ahora la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

- $x = 2$ queda $\Sigma \frac{(-1)^n}{n}$ que converge por el criterio de Leibnitz (términos alternantes en signo con $\frac{1}{n} \to 0$).
- $x = -2$ queda $\Sigma \frac{1}{n}$ que diverge: es la conocida serie armónica.

Luego, el intervalo de convergencia es $]-2, 2]$.

**(iii)** Sea

$$f(x) = \int_0^{h(x)} g(t)dt$$

La función $f$ resulta ser derivable en $\mathbb{R}$ por el TFC, ya que $g$ es continua en $\mathbb{R}$ (en particular integrable y evaluable en los extremos de integración) y $h$ es derivable, entonces

$$f'(x) = g(h(x))h'(x).$$

La base de la demostración reposa en la propiedad siguiente

(*) $f$ creciente en un intervalo real $\Leftrightarrow f' \geq 0$ en ese intervalo.

**Nota:** Note que $f$ est. creciente en un intervalo real $\not\Rightarrow f' > 0$ en ese intervalo. Tome por ejemplo $f(x) = x^3$ que es estrictamente creciente y $f'(0) = 0$.

Entonces, usando que

$$g(h(x)) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se tiene

$$\begin{aligned} f \text{ creciente} &\Leftrightarrow f' = (g \circ h)h' \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h' = \frac{f'}{g \circ h} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow h \text{ creciente.} \end{aligned}$$

**Asignación de puntaje P1**

**(i) (2 pts.)**

0.5 escoger bien el test

1.0 límite calculado correctamente

0.5 $R$ calculado correctamente

**(ii) (2 pts.)**

0.5 escoger bien el test

0.5 límite y radio de convergencia

0.5 análisis en $x = 2$.

0.5 análisis en $x = -2$.

**(ii) (2 pts.)**

0.5 derivada correcta

0.5 caracterización del crecimiento correcta

0.5 notar que $g \circ h > 0$

0.5 aplicar correctamente lo anterior para concluir

**P2.-** Considere la sucesión de funciones definida por:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, \qquad x \in [0,1],\ n \geq 1.$$

**(i)** (1.2 pto) Calcule $s_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

**(ii)** (1.4 pto) Demuestre que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}$ y deduzca $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

**(iii)** (1.2 pto) Demuestre que el límite puntual de $f_n$ es $f(x) = x$, para $x \in [0,1]$.

**(iv)** (1.2 pto) Sea $g_n(x) = f(x) - f_n(x)$, $x \in [0,1]$. Calcule $g_n'$ y $\sup\limits_{x\in[0,1]} |g_n(x)|$, $n \geq 1$. Pruebe que $f_n$ converge uniformemente a $f$.

**(v)** (1 pto) A partir del análisis precedente, dé una manera **alternativa** de calcular $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

**Pauta P2.-** Sea $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}, x \in [0,1], n \geq 1$.

**(i)** Calculemos:

$$\begin{aligned}
s_n &= \int_0^1 f_n(x)dx = n\int_0^1 \frac{x}{n+x}dx = \\
&= n\int_0^1 \frac{x+n-n}{n+x}dx = -n^2\int_0^1 \frac{1}{n+x}dx + n\int_0^1 dx \\
&= -n^2\ln(n+x)\big|_{x=0}^1 + nx\big|_{x=0}^1 = n - n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).
\end{aligned}$$

**(ii)** Usando la regla de l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln(\frac{x+1}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{x+1}{1})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{x-(x+1)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

Usando tres veces la regla de l'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln(\frac{x+1}{x})\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - x\ln(\frac{x+1}{x})}{1/x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{-\ln(\frac{x+1}{x}) - x(\frac{-1}{x^2})\frac{x}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(x^2\ln(\frac{x+1}{x}) - \frac{x^2}{x+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{x+1}}{1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x+1}(-\frac{1}{x^2}) + \frac{1}{(x+1)^2}}{-2/x^3} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)x^3 = \frac{1}{2}\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x+1)^2}}_{1} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Se deduce que

$$\lim_{x\to\infty} s_n = \lim_{x\to\infty} n\left(1 - n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

**(iii)** Calculemos el límite puntual:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{nx}{n+x} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+\frac{x}{n}} = x \qquad \forall x \in [0,1].
\end{aligned}$$

**(iv)** Tenemos:

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= f(x) - f_n(x) = x - \frac{nx}{n+x} = \frac{nx + x^2 - nx}{n+x} = \frac{x^2}{n+x}, \\
g_n'(x) &= \frac{(n+x)2x - x^2}{(n+x)^2} = \frac{2x^2 + 2nx - x^2}{(n+x)^2} = \frac{x^2 + 2nx}{(n+x)^2}.
\end{aligned}$$

Para calcular $\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)|$, notemos que $g_n(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow g_n = |g_n|$. Igualmente $g_n'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \Rightarrow g_n$ creciente en $[0,1]$, entonces el supremo se alcanza en el extremo superior del intervalo:

$$\sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} g_n(x) = g(1) = \frac{1}{n+1}.$$

Como $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |g_n(x)| = \frac{1}{n+1} \to 0$ si $n \to \infty$ entonces, por definición de convergencia uniforme, $f_n$ converge uniformemente a $f(x) = x$.

**(v)** Dado que $f_n \to f$ uniformemente, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \sup_{x\in[0,1]} f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x = \frac{x^2}{2}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{1}{2}.$$

La primera igualdad se debe a la convergencia uniforme (cambio del límite por la integral), la segunda igualdad se tiene por la definición de límite puntual.

**Asignación de puntaje P2**

**(i) (1.2 pts.)**

0.5 primitiva $\int \frac{1}{n+x}\,dx$

0.5 primitiva $\int\, dx$.

0.2 evaluar correctamente las integrales definidas

**(ii) (1.4 pts.)**

0.4 primer límite

0.6 segundo límite

0.4 límite $s_n$.

**(iii) (1.2 pts.)**

0.4 definición de límite puntual

0.8 cálculo del límite puntual

**(iv) (1.2 pts.)**

0.1 cálculo de $g_n$

0.2 cálculo de $g_n'$

0.4 cálculo del supremo

0.3 límite del supremo

0.2 conclusión

**(v) (1.0 pts.)**

1.0 usar convergencia uniforme y def. de conv. puntual.

**P3.-** Analice la función

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Para ello:

**(i)** (1.2 pto) Indique dominio de $f$ y analice la continuidad de $f$ en todo su dominio.

**(ii)** (1.2 pto) Calcule $f'$. Calcule $\lim_{x\to 0+} f'(x)$. Analice crecimiento. Encuentre máximos y mínimos (locales o globales).

**(iii)** (1.2 pto) Calcule $f''$. Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

**(iv)** (1.2 pto) Estudie $\lim f(x)$ cuando $x \to 1^-$, $x \to 1^+$, $x \to +\infty$. Establezca asíntotas verticales y horizontales.

**(v)** (1.2 pto) Haga un gráfico detallado de la función siguiendo el análisis precedente.

**Pauta P3.-** Análisis de $f(x) = e^{1/\ln(x)}$ si $x > 0$, $f(x) = 1$ si $x = 0$.

**(i)** Dominio $= [0, 1) \cup (1, +\infty)$

Continuidad para $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$: la función es continua pues $\ln(x)$ es continua para $x > 0$, $\ln(x) \neq 0$ para $x \neq 1$ por lo que $1/\ln(x)$ es continua para $x > 0, x \neq 1$ y la composición con $e^x$ es continua por ser composición de funciones continuas.

Continuidad para $x = 0$: verifiquemos si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1$, en efecto, cambiando dos veces variables:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/\ln x} = \lim_{y\to -\infty} e^{1/y} = \lim_{z\to 0^-} e^z = 1.$$

**Nota:** el análisis en $x = 1$ no corresponde pues 1 no está en el dominio de $f$.

**(ii)** Derivabilidad: el análisis de la derivada debe hacerse para $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$. La función es derivable en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ por simple álgebra de derivadas (regla cadena, cuociente)

$$f'(x) = (e^{1/\ln(x)})' = \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' e^{1/\ln(x)} = -\frac{1}{x(\ln(x))^2} e^{1/\ln(x)}.$$

Vamos ahora a calcular el límite:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x(\ln(x))^2} e^{1/\ln(x)},$$

pero usando la regla de l'Hôpital dos veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} x(\ln(x))^2 &= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(x))^2}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\ln(x) \cdot 1/x}{-1/x^2} = -2 \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) \\ &= -2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{1/x^2} = 2 \lim_{x\to 0^+} x = 0, \end{aligned}$$

de donde

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(e^{1/\ln(x)} - 1) = -\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x(\ln(x))^2}\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0^+} e^{1/\ln(x)}\right) = -\infty.$$

Crecimiento: $f'(x) = -\frac{1}{x(\ln(x))^2} e^{1/\ln(x)} < 0$ si $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ entonces:

- $f$ es decreciente en $(0, 1)$ (estrictamente)
- $f$ es decreciente en $(1, +\infty)$ (estrictamente).

**Nota:** No necesariamente $f$ es decreciente globalmente en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Máximos y mínimos: como $f$ es decreciente en $(0, 1)$, y $f(0) = 1$, lo único que se puede decir es que $f$ tiene un máximo local en $x = 0$.

**(iii)** Segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= +\frac{2x\ln(x)\cdot\frac{1}{x}+(\ln(x))^2}{x^2(\ln(x))^4}e^{1/\ln(x)}+\frac{1}{x^2(\ln(x))^4}e^{1/\ln(x)} \\ &= \frac{1+2\ln(x)+(\ln(x))^2}{x^2(\ln(x))^4}e^{1/\ln(x)}, \qquad x\in(0,1)\cup(1,+\infty). \end{aligned}$$

Concavidad, convexidad, ptos. de inflexión: claramente

$$f''(x)=\frac{(1+\ln(x))^2}{x^2(\ln(x))^4}e^{1/\ln(x)}\geq 0, \qquad x\in(0,1)\cup(1,+\infty),$$

de modo que

- $f$ es convexa en $(0,1)$ (estrictamente)
- $f$ es convexa en $(1,+\infty)$ (estrictamente).

**Nota:** De nuevo, no necesariamente $f$ es convexa globalmente en $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

Puntos de inflexión: $f''(1/e)=0$, sin embargo $x=1/e$ no es un punto de inflexión pues la convexidad de la función no cambia.

**(iv)** Asíntotas: $x\to 1^-, x\to 1^+, x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-} e^{1/\ln(x)}=\lim_{y\to 0^-} e^{1/y}=\lim_{z\to-\infty} e^z=0,$$

$\Rightarrow$ no hay asíntota vertical por la izquierda de $x=1$.

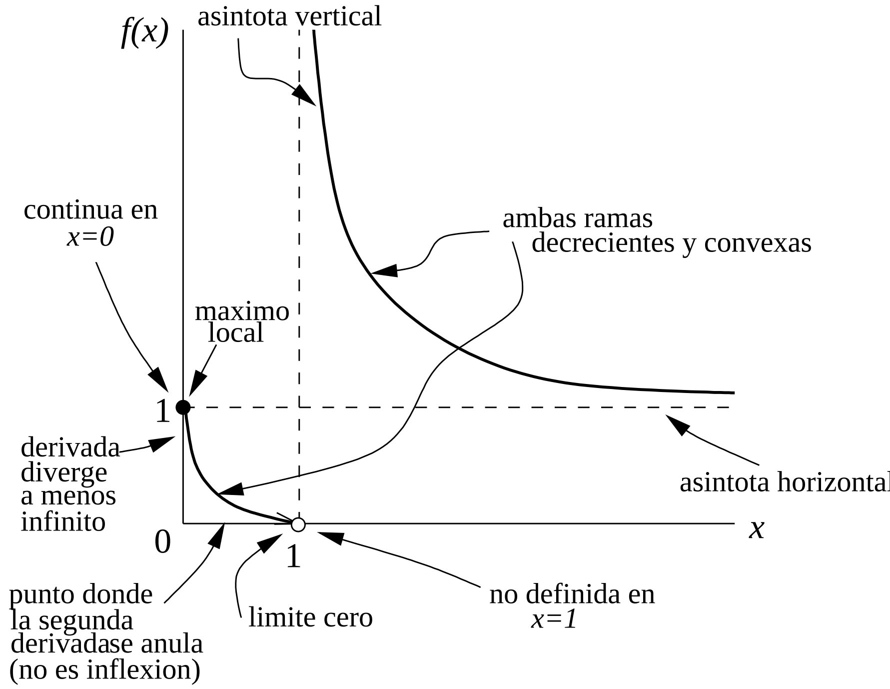
$$\lim_{x\to 1^+} e^{1/\ln(x)}=\lim_{x\to 0^+} e^{1/y}=\lim_{x\to+\infty} e^z=+\infty$$

$\Rightarrow$ hay asíntota vertical por la derecha de $x=1$.

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/\ln(x)}=\lim_{x\to+\infty} e^{1/y}=\lim_{x\to 0^+} e^z=1$$

$\Rightarrow$ hay asíntota horizontal a la recta $y=1$ si $x\to+\infty$.

(v) <u>Gráfico</u>




**Asignación de puntaje P3**

**(i) (1.2 pts.)**

0.4 dominio

0.3 continuidad fuera de cero

0.5 continuidad en cero

**(ii) (1.2 pts.)**

0.3 derivada

0.3 límite pedido

0.3 crecimiento

0.3 máximo local

**(iii) (1.2 pts.)**

0.5 segunda derivada

0.3 signo de segunda derivada

0.2 convexidad

0.2 discusión de puntos de inflexión

**(iv) (1.2 pts.)**

0.4 primer límite y conclusión

0.4 segundo límite y conclusión

0.4 tercer límite y conclusión

**(v) (1.2 pts.)**

0.4 ambas ramas decrecientes y convexas

0.2 límite cero si $x \to 1^-$

0.2 asiíntota vertical

0.2 asiíntota horizontal

0.1 derivada tiende a $-\infty$ si $x \to 0^+$

0.1 máximo local o falso pto. inflexión o no definición en $x = 1$