Examen, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2006-1 (1° de Diciembre)

P1.

a) La derivada del polinomio $P(x) = 2 + 3x^2 - x^3$ es $P'(x) = 6x - 3x^2$, que corresponde a una parábola positiva entre 0 y 2. Por lo tanto P es decreciente en $(-\infty, 0)$, es creciente en $(0, 2)$ y decreciente nuevamente en $(2, \infty)$.

En consecuencia: P tiene su mínimo local en 0 y su máximo local en 2.

Además $P(0) = 2$ con lo cual $P(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$. Evaluando en 3 y en 4, se obtiene: $P(3) = 2$ y $P(4) = -14$. Por lo tanto en virtud del T.V.I. se concluye que $\exists x_0 \in [3, 4]$ donde $P(x_0) = 0$.

Con esto, $P(x) > 0$ en $(-\infty, x_0)$ y $P(x) < 0$ en (x_0, ∞).

b) Consideremos la función $F\colon (-1, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ definida por la ley $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{\sqrt{1+t^3}}$

b$_1$) Claramente $F(1) = 0$.
Además, si $x > 1$ entonces $t > 1$ y con esto $\frac{t-1}{\sqrt{1+t^3}} > 0$. Por lo tanto se trata de una integral de una función positiva, la cual es positiva.
Si $x < 1$ entonces $t - 1 < 0$ y ahora es la integral de una función negativa. Pero los límites son $1 > x$, luego $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \frac{1-t}{\sqrt{1+t^3}} > 0$.
Cuando $x \to -1$ la integral es impropia de la forma $\int_1^{-1} \frac{t-1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+t}}$ la cual es convergente.
Cuando $x \to +\infty$ la integral es impropia de la forma $\int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\sqrt{1+t^3}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}$ la cual es diververgente.

b$_2$) Usando el TFC se tiene que $F'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+x^3}}$
la cual es positiva cuando $x > 1$ y negativa cuando $x < 1$.
Por lo tanto F es decreciente en $(-1, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$.

b$_3$) Derivando nuevamente se obtiene que $F''(x) = \frac{\sqrt{1+x^3} - (x-1)\frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{1+x^3} = \frac{2+2x^3-3x^3+3x^2}{2(1+x^3)^{3/2}} = \frac{2+3x^2-x^3}{2(1+x^3)^{3/2}}$,
es decir $F''(x) = \frac{P(x)}{2(1+x^3)^{3/2}}$.
Usando la parte (a) se concluye que F es convexa entre $(-1, x_0)$ y concava en (x_0, ∞). La inflexión de F ocurre en $x_0 \in [3, 4]$.

P2.

a) *(1.5 ptos.)* Usando el cambio de variables $x = \frac{\pi}{4} - u$, la integral $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x)dx$ se transforma en

$$\begin{aligned}
I &= -\int_{\pi/4}^{0} \ln\left(1 + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - u\right)\right) du \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \frac{1 - \operatorname{tg} u}{1 + \operatorname{tg} u}\right) du \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln\left(\frac{2}{1 + \operatorname{tg} u}\right) du \\
&= \int_0^{\pi/4} \ln 2du - \int_0^{\pi/4} \ln\left(1 + \operatorname{tg} u\right) du \\
&= \ln 2\frac{\pi}{4} - I
\end{aligned}$$

Por lo tanto, despejando se obtiene $I = \frac{\pi}{8}\ln 2$.

b) *(1.5 ptos.)* El largo de la elipse de ecuación $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ se calcula mediante la integral

$$I_1 = 4\int_0^1 \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$$

donde $y = \sqrt{2}\sqrt{1 - x^2}$.

Por lo tanto, $y' = \sqrt{2}\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1-x^2}}$. De donde $1 + y'^2 = 1 + \frac{2x^2}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2}$. Con esto la integral es igual a

$$I_1 = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + x^2}{1 - x^2}}dx.$$

El largo de la sinusoïde $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π se calcula mediante la integral

$$I_2 = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x}dx.$$

En esta última integral hacemos el cambio de variables $u = \cos x$, donde $du = \operatorname{sen} xdx$, o sea $dx = \frac{du}{\operatorname{sen} x} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ y se obtiene que

$$I_2 = 4\int_0^1 \sqrt{\frac{1 + u^2}{1 - u^2}}du = I_1.$$

c) Los límites se calculan usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\right)\left(\frac{1}{3\cos^2 x}\right) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2 - 2\cos x - x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen} x - 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{2x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{6x^2} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\ln(1+x)\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x}\right) = e
\end{aligned}
$$

P3.

a) Para encontrar el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^{2n}x^n,$$

usamos el criterio de la raíz enésima a la serie de los valores absolutos. Se tiene que:

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^2|x|=\frac{4}{9}|x|.$$

Luego $R=\frac{9}{4}$.

Para analizar los extremos se tiene que en $x=\pm\frac{9}{4}$ las series quedan

$$\sum_{n\geq 0}(\mp 1)^n\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n-\frac{2}{3}}\right)^{2n}.$$

El término enésimo, en valor absoluto, de estas series NO converge a cero ya que

$$\lim\left(\frac{n-\frac{1}{2}}{n-\frac{2}{3}}\right)^n=\lim\left(1+\frac{\frac{1}{6}}{n-\frac{2}{3}}\right)^n=e^{1/6}.$$

Por lo tanto la serie no converge en ninguno de sus extremos.

b) La serie geométrica $\sum x^n$ vale

$$\sum_{n\geq 0}x^n=\frac{1}{1-x}$$

y tiene radio de convergencia 1. Integrando se obtiene que

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)$$

Con esto es claro que

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(1-\frac{1}{e})^n}{n}=-\ln\left(1-(1-\frac{1}{e})\right)=1.$$

c) Consideremos la sucesión de funciones definida por $f_n(x)=e^{-nx^2}g(nx)+g(x)$ donde la función g es tal que $0\leq g(x)\leq 1$.

i) El límite puntual de $\{f_n\}$ en $(0,+\infty)$ es $g(x)$ ya que $e^{-nx^2}=\left(e^{-x^2}\right)^n\to 0$. y $g(nx)$es acotada por 1.
El límite puntual de $\{f_n\}$ en 0 es $2g(0)$ ya que $f_n(0)=g(n0)+g(0)$.

ii) Dado $q>0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_\infty &= \sup_{x\geq q}e^{-nx^2}g(nx)\\ &\leq e^{-nq^2}\cdot 1\end{aligned}$$

Luego, $\|f_n-f\|_\infty\to 0$ y en consecuencia la convergencia es uniforme en $[q,+\infty)$.

iii) Si $g(1)=\alpha>0$ entonces en el intervalo $[0,+\infty)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|f_n-f\|_\infty &= \sup_{x>0}e^{-nx^2}g(nx)\\ &\geq e^{-nx_n^2}\cdot g(nx_n)\end{aligned}$$

donde, tomando el valor $x_n = 1/n$ se obtiene que

$$\|f_n - f\|_\infty \geq \alpha e^{-\frac{1}{n}}$$

Como esta cota inferior tiende a $\alpha > 0$ se prueba que **no es posible** que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, por lo tanto la convergencia no es uniforme en $[0, +\infty)$.