UNIVERSIDAD DE CHILE

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

MA-12A-CALCULO-1996
Pauta Examen Segunda Fecha

Martes 14 de Enero de 1997

P.1.

a) **(2 pts)** Demuestre que la función $y = e^{\arcsin x}$ satisface la ecuación diferencial $(1-x^2)y'' = xy' + y$

b) **(2 pts)** Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x}$

c) **(2 pts)** Estudie la convergencia de la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Solución.

a)

$$\begin{aligned}
y &= e^{\arcsin x}\\
y' &= e^{\arcsin x}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}\\
y'' &= y'\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + y(-1/2)\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{(3/2)}}\\
&= \frac{y'}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{xy}{(1-x^2)^{(3/2)}}\\
(1-x^2)y'' &= \sqrt{1-x^2}\cdot y' + x\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = y + xy'
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{1/x} &= \lim_{x\to 0}\exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{(1+\sin x)}}{1}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{(1+\sin x)}\right)\\
&= \exp\left(\frac{1}{1+0}\right) = e
\end{aligned}$$

c) si $x \to \infty$: $0 \le \dfrac{1}{\sqrt{x}(x+a)} \le \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ y como $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ converge ($\alpha = 3/2 > 1$) entonces $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ también.

Cuando $x \to 0$ se tienen dos casos posibles:

caso $a > 0$: en este caso $0 \le \frac{1}{\sqrt{x}(x+a)} \le \frac{1}{a\sqrt{x}}$ y como $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}$ converge ($\alpha = 1/2 < 1$) entonces $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ también.

caso $a = 0$: en este caso la integral queda $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^3}}$la cual es divergente ($\alpha = 3/2 > 1$)

En consecuencia, la integral impropia $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x+a)}$ converge si $a > 0$ y diverge si $a = 0$

P.2.

a) **(2 pts)** Bosqueje la curva de ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, justificando debidamente. (En particular indique dominios, intersección con los ejes, crecimientos y concavidades)

b) **(2 pts)** Calcule el área de la región R encerrada entre las curvas $C_1 : \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ y $C_2 : x + y = a$

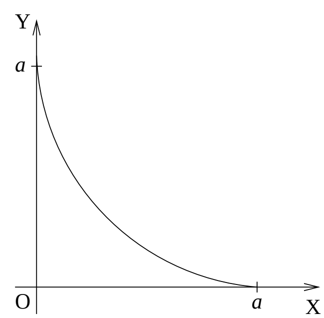
c) **(2 pts)** Calcule el volumen del sólido de revolución generado por la rotación de la región R (de la parte (b)) en torno al eje OX.

Solución

a) La ecuación $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ solo tiene sentido si $x, y > 0$ a causa de las raices cuadradas. Además, como la suma no puede ser mayor que $\sqrt{a}$ entonces necesariamente $x, y < a$. Con esto la curva esta restringida al cuadrado $[0, a] \times [0, a]$.
$x = 0 \Leftrightarrow y = a$ y además $y = 0 \Leftrightarrow x = a$ luego los cortes con los ejes son los puntos $(0, a)$ y $(a, 0)$
Despejando y se obtiene $y = a + x - 2\sqrt{ax}$, luego las derivadas son:

$$\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{a}{\sqrt{ax}} = 1 - \sqrt{\frac{a}{x}} < 0 \\ y'' &= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x^3}} > 0 \end{aligned}$$

luego se deduce que la curva es decreciente y convexa en $[0, a]$
es decir es de la siguiente forma:



b)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a [(a-x) - (a + x - 2\sqrt{ax})]dx \\ &= 2\int_0^a [\sqrt{ax} - x]dx = \left[\frac{4}{3}\sqrt{ax^3} - x^2\right]_0^a = \frac{1}{3}a^2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^a [(a-x)^2 - (a + x - 2\sqrt{ax})^2]dx \\ &= \pi \int_0^a [a^2 + x^2 - 2ax - (a^2 + x^2 + 4ax + 2ax - 4a\sqrt{ax} - 4\sqrt{ax^3})]dx \\ &= \pi \int_0^a [-8ax + 4a\sqrt{ax} + 4\sqrt{ax^3}]dx = 4\pi \left[-ax^2 + \frac{2}{3}a\sqrt{ax^3} + \frac{2}{5}\sqrt{ax^5}\right]_0^a = \frac{4}{15}\pi a^3 \end{aligned}$$

P.3.

a) **(2 pts)** Determine el intervalo de convergencia para la serie de potencias $\sum_1^\infty \frac{1}{n}x^n$ (Ind. no olvide analizar los extremos del intervalo)

b) **(2 pts)** Determine el conjunto de convergencia C de la serie de funciones $\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$

c) Sea $f : C \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1-x}\right)^n$.

  i) **(1 pts)** Demuestre que $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-2x)}$

  ii) **(1 pts)** Integrando, encuentre una expresión explícita para $f(x)$

Solución:

a) Usando el criterio de la raiz n-esima tenemos que la serie converge cuando $\lim_n \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} < 1$ es decir cuando $|x| < 1$.
Luego el radio de convergencia de la serie de potencias es $r = 1$.
para $x = 1$ la serie queda $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n}$, es decir, la serie harmonica que no converge.
para $x = -1$ la serie queda $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}$, es decir, la serie harmonica alternante, la cual es convergente.
Luego el intervalo de convergencia es $I = [-1, 1)$

b) $x \in C$ ssi $\dfrac{x}{1-x} \in I$, es decir, ssi $-1 \leq \dfrac{x}{1-x} < 1$, o sea, ssi $\dfrac{1}{1-x} \geq 0$ y $\dfrac{2x-1}{1-x} < 0$.
La primera inecuación tiene la solución $x < 1$. La segunda tiene los puntos de corte $x = 1/2$ y $x = 1$, claramente su solución es el intervalo $(-\infty, 1/2) \cup (1, \infty)$.
Luego, de la intersección de ambas soluciones, resulta que $C = (-\infty, \frac{1}{2})$

c)

i) Como f proviene de la composición de una serie de potencias y la función $\dfrac{x}{1-x}$ para obtener su derivada basta con derivar término a termino la serie. Es decir:

$$\begin{aligned}
f' &= \sum_1^\infty \frac{1}{n}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^n\right]' = \sum_1^\infty \left(\frac{x}{1-x}\right)^{n-1}\frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{1-x}\right)^n = \frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{1-\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}
\end{aligned}$$

ii) Integrando se obtiene:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{dx}{(1-x)(1-2x)} + C = \int \frac{-dx}{1-x} + \int \frac{2dx}{1-2x} + C \\
&= \ln|1-x| - \ln|1-2x| + C = \ln\frac{1-x}{1-2x} + C
\end{aligned}$$

Claramente para $x = 0$ la serie da $f = 0$ luego la constante de integración es igual a cero. Luego $f(x) = \ln\left[\dfrac{1-x}{1-2x}\right]$