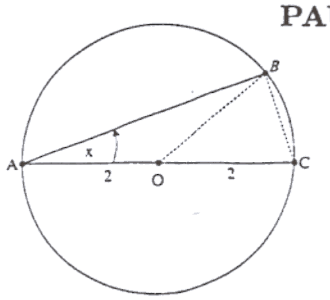
EXAMEN CALCULO MA12A
PAUTA PROBLEMA 1

a) i)



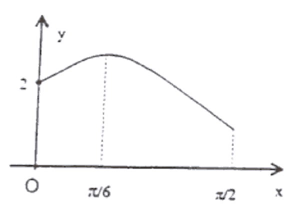
Es inmediato que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$
de modo que $\overline{AB} = \overline{AC}\cos x = 4\cos x$
También $\sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC = 2x$

y por lo tanto Arco $\widehat{BC} = R \cdot 2x = 4x$ (1.0 pto.)

Entonces $T(x) = \frac{\overline{AB}}{V_{AB}} + \frac{\widehat{BC}}{V_{BC}} = \frac{4\cos x}{2} + \frac{4x}{4}$

Es decir $\boxed{T(x) = 2\cos + x}$ $\begin{cases} V_{AB} = 2km/h \\ V_{\overline{BC}} = 4km/h \end{cases}$ (1.0 pto.)

ii) $T'(x) = -2\,\mathrm{sen}\, x + 1 \Rightarrow T'(x) = 0$ si $\mathrm{sen}\, x = \frac{1}{2}$ es decir si $x = \frac{\pi}{6}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de modo que $T(x)$ crece en $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ y decrece en $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Además $T''(x) = -2\cos x < 0 \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, es decir (0.5 ptos.)
$T(x)$ es concava en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



(0.3 ptos.)

iii) Es inmediato que $T\left(\frac{\pi}{6}\right)$ =2.2 es un máximo absoluto en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ pués
$T'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \wedge T''\left(\frac{\pi}{6}\right) < 0$ (0.6 ptos.)

iv) Se deduce de (ii) y (iii) que el mínimo de $T(x)$ esta en un extremo, es decir, es $T(0)$ o $T\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
Como $T(0) = 2 \wedge T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ =1.57 se concluye que el mínimo se alcanza para $x = \pi/2$.
De modo que la trayectoria debe ser por el arco $\widehat{ABC}$ (semiperímetro del lago) y lo cubre en $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 1.57$ hrs. (0.6 ptos.)

b) **Forma (a)**

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}\, x}{x} \Rightarrow x\, f/x) = \mathrm{sen}\, x$$

Según la formula de Leibniz para la derivada del producto de funciones

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k)} f^{(n-k)}(x) = (\mathrm{sen}\, x)^{(n)}$$

Entonces

$$\binom{n}{0} x^{(0)} f^{(n)}(x) + \binom{n}{1} x' f^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} x'' f^{n-2}(x) 1 \ldots = \mathrm{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

es decir

$$xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n}{2}\pi\right)$$

(1.0 pto.)

Si $x = 0$ queda $nf^{(n-1)}(0) = \operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}\pi\right)$ o bien, corriendo indices:

$$f^{(n)}(0) = \frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)}{2}\pi}{n+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n+1} & \text{si } n \text{ par} \end{cases}$$

(1.0 pto.)

OBS. Eventualmente puede expresarlo de otra forma.

Forma (b)

Se sabe que $\operatorname{sen} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

De modo que $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$

Pero también el desarrollo en serie de Taylor de $f(x)$ (en torno a 0) puede escribirse como $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (1.0 pto.)

De modo que por identificación (pués el desarrollo es único) se tiene que, si k es impar, $(k = 2n+1)$ $\boxed{f^{(2n+1)}(0) = 0}$ y si k es par $(k = 2n)$ $\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$

es decir $\boxed{f^{(2n)}(0) = (-1)^n \frac{1}{2n+1}}$ (1.0 pto)

OBS. Cualquiera de las Formas obtiene (2.0 ptos.)

EXAMEN CALCULO MA12A
PAUTA PROBLEMA 2

a) i) Para la continuidad debe cumplirse que

$$\lim_{x\to 1^-} f_n(x) = \lim_{x\to 1^+} f_n(x) = f_n(1), \text{ esto es}$$

$$\lim_{x\to 1^-} (a_n x^n) = a_n, \ \lim_{x\to 1^+} \left(\frac{n-1}{nx}\right) = \frac{n-1}{n} \wedge f_n(1) = \frac{n-1}{n}$$

Entonces $f_n(x)$ es continua en $x=1$ si $a_n = \frac{n-1}{n}$ y así, $f_n(x)$ es continua en $[0,\infty)$

(0.6 ptos.)

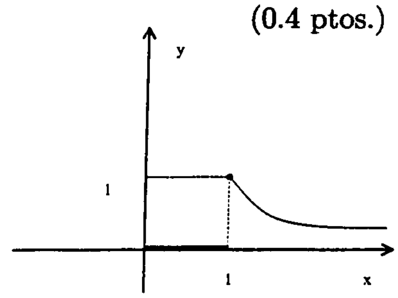
ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} x^n$ en $x \in [0,1]$

Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \to (\lim \frac{n-1}{n} = 1) \end{cases}$ (0.4 ptos.)

Además, si $x \in (1,\infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{nx} = \frac{1}{x}$

De modo que $f(x)$, límite puntual de $f_n(x)$ es

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



(0.4 ptos.)

iii) Para estudiar la convergencia uniforme, puede calcular $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0$, es decir, el supremo de $|f_n(x) - f(x)|$ no tiende a 0 y por lo tanto $f_n(x) \overset{c.u}{\nrightarrow} f(x)$
También puede argumentar que, como $f(x)$ es discontinua en $[0,\infty)$ y las $f_n(x)$ son todas continuas, la convergencia no puede ser uniforme. (0.6 ptos.)

b) i) Para estudiar el radio de convergencia de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^k}{(nk)!} x^n$ puede estudiar

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to 0}\left|\frac{An+1}{An}\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{[(n+1)!]^k x^{n+1}(nk)!}{[k(n+1)]!(n!)^k x^n}\right| \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k (nk)!}{(nk+k)!} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k 1\cdot 2\ldots nk}{1\cdot 2\ldots nk(nk+1)(nk+2)\ldots(nk+k)} \\
&= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{(nk+1)(nk+2)\ldots(nk+k)} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k}{k^k\left(n+\frac{1}{k}\right)\left(n+\frac{2}{k}\right)\ldots(n+1)}
\end{aligned}$$

(0.5 ptos.)

Pero $\frac{(n+1)^k}{\left(n+\frac{1}{k}\right)\ldots(n+1)} \to 1$ (ambos polinomios son de grado k)

De modo que $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{An+1}{An}\right| = \frac{|x|}{k^k}$

Entonces el radio de convergencia es $r = k^k$ (0.5 ptos)

ii) Se puede usar el criterio del cuociente o de la raíz

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{An+1}{An}\right| = \lim\left|\frac{(-1)^{n+1}3^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\cdot\frac{\sqrt{n+1}}{(-1)^n 3^n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} 3|x|\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} = 3|x|$$

De modo que radio de convergencia es $r = \frac{1}{3}$ (0.5 ptos.)
Intervalo provisorio $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Para los extremos se tiene , en $x = \frac{1}{3}$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ que es una serie alternante de Leibniz con $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0$ decreciendo.
$\therefore$ La serie converge en $x = 1/3$ (0.5 ptos.)
Para $x = -1/3$ $\sum \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ que diverge, por comparación, por ejemplo, con $\sum \frac{1}{n+1}$ (armónica)
Así, el intervalo de convergencia es $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ (0.5 ptos.)

iii) El desarrollo para $e^{-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in I\!R$ de modo que
$e^{-x^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n}}{n!}$ y $x^2e^{-x^3} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{n}$ $\quad\forall x \in I\!R$ (0.5 ptos.)
Entonces $\int_0^1 x^2e^{-x^3}dx = \int_0^1 \sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{n!} = \sum\limits_0^{\infty}(-1)^n\left.\frac{x^{3n+3}}{(3n+3)n!}\right|_0^1 = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ (0.5 ptos.)
Además $\int_0^1 x^2e^{-x^3}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-u}du = \frac{1}{3}(-e^{-u})\int_0^1 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{e}\right)$
$u = x^3$; $du = 3x^2dx$
De la igualdad queda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{e}$ (0.5 ptos.)

EXAMEN CALCULO MA12A
PAUTA PROBLEMA 3

a) $f(x) = x^2\, ln|x|$

i) Dom $f = I\!R - \{0\}$ y $f(x) = f(-x)$, es decir f es par (simetría $c/r\ OY$)
Ceros $x = \pm 1$ (0.5 ptos.)

ii) Continuidad: $x^2, ln\,x, |x|$ son continuas en $I\!R^+$
Entonces $f(x) = x^2 ln|x|$ es continua en $I\!R - \{0\}$ (por la paridad)
Además $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2\, ln\, x = \lim_{x\to 0^+} \frac{ln\,x}{1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-2/x^3} = 0$ (L'Hopital)
De modo que puede repararse con $f(x) = \begin{cases} x^2 ln|x|; & x \neq 0 \\ 0; & x = 0 \end{cases}$
Con lo cual $f(x)$ es continua en $I\!R$ (0.5 ptos.)

iii) $f'(x) = 2x\, ln\, x + x^2 \frac{1}{x} = 2x\, ln\, x + x$ para $x \in I\!R^+$
De modo que $f'(x) = x(2ln\, x + 1)$ y $f'(x) = 0$ si $ln\, x = -\frac{1}{2}$

Es decir $x = e^{-1/2}$ es punto critico. (0.4 ptos.)
También si $x = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x\, ln\, x + x) = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{ln\,x}{1/x} + \lim_{x\to 0^+} x$
$= 2 \lim\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) + 0 = 2 \cdot 0 + 0 = 0$
De modo que $f'(x) = 0$ si $x = 0 \wedge x = e^{-1/2}$ (0.4 ptos.)

Crecimiento		$(-\infty, -e^{-1/2})$	$(-e^{-1/2}, 0)$	$(0, e^{-1/2})$	$(e^{-1/2}, \infty)$
	$f'(x)$	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(+)$
	$f(x)$	decrece	crece	decrece	crece

con esto $x = \pm e^{-1/2}$ son puntos de mínimo absoluto
$x = 0$ (límite) es pto. de máximo relativo (0.4 ptos.)
(superado por $f(x) \to \infty$ si $x \to \pm\infty$)

iv) $f''(x) = 2\, ln\, x + 2x\frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f''(x) = 2\, ln\, x + 3$ en $I\!R^+$
Entonces $f''(x) = 0$ si $2\, ln\, x + 3 = 0 \Rightarrow x = e^{-3/2} \in I\!R^+$
Según la simetría $f''(x) = 0$ si $x = \pm e^{-3/2}$ (0.6 ptos.)

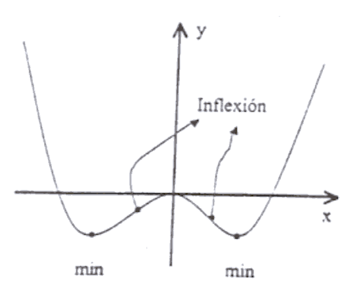
Entonces		$(-\infty, -e^{-3/2})$	$(-e^{-3/2}, e^{-3/2})$	$(e^{-3/2}, \infty)$
	f''	$(+)$	$(-)$	$(+)$
	f	convexa	concava	convexa

De modo que $x = \pm e^{-3/2}$ son puntos de inflexión (0.6 ptos.)

v) Gráfico aproximado

x	$f(x)$
± 1	0
0	0
$\pm e^{-1/2}$	$-e^{-1}/2$
$\pm e^{-3/2}$	$-\frac{3e^{-3}}{2}$

Recorrido: $[-\frac{e^{-1}}{2}, \infty)$



(0.6 ptos)

b) i) El área que se pide corresponde a la región achurada del gráfico anterior.
Entonces, utilizando la simetría

$$A = (2 \text{ veces }) \int_0^1 x^2 ln(x)dx = 2\left[\frac{1}{3}x^3 ln\, x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{x}x^3 dx\right]$$

Por partes $\begin{cases} u = ln\, x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx \to v = \frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

$\therefore A = 2\left[0 - \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{3}x^3 ln\, x\right) - \frac{1}{3}\Big|\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right] = 2\left(-\frac{1}{9}\right) = -\frac{2}{9}$ (0.5 ptos.)

Entonces $A = \frac{2}{9}$ (Se considera $A = 2\int_0^1 |x^2 ln(x)|dx$) (0.5 ptos.)

iii) Para el volumen, también por simetría, la región del cuarto cuadrante se superpone a la del tercer cuadrante al rotar en torno al eje OY
Entonces $V_{OY} = 2\pi\int_0^1 xf(x)dx = 2\pi\int_0^1 x^3 ln(x)dx$
Por partes $u = ln\, x \to du = \frac{1}{x}dx$
$dv = x^3 dx \to v = \frac{1}{4}x^4$ (0.5 ptos.)
Así $V_{OY} = 2\pi\left[\frac{1}{4}x^4\, ln\, x\Big| 1_0 - \frac{1}{4}\int_0^1 x^4 \frac{1}{x}dx\right] = -\frac{\pi}{2}\Big|\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{8}$
Como en el caso anterior, el volumen es positivo

$$V_{OY} = \frac{\pi}{8}$$

(0.5 ptos.)