Pauta Examen MA12A Cálculo I
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Noviembre 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/∼lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Pauta Problema 1

i) $f(x)\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$
El radio de convergencia puede determinarse con

$$r=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}}=\frac{1}{1}=1$$

o bien aplicando el criterio del cuociente o de la raíz enésima

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x|$$

Para convergencia es necesario que $|x|<1$, así, $r=1$ y el intervalo de convergencia $I_c\subseteq[-1,1]\ \wedge\ I_c\supseteq(-1,1)$ obliga a estudiar los extremos $x=1\ \wedge\ x=-1$.
Para $x=1$ la serie queda $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ que converge ($\sum\frac{1}{n^\alpha}$ con $\alpha=2>1$) y para $x=-1$ queda $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ que también converge por ser tipo **Leibnitz** (alternante) con $\frac{1}{n^2}\to 0$ decreciendo.
Sigue que $r=1\ \wedge\ I_c=[-1,1]$. **(1.0 pto.)**
Para $f'(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n^2}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$ que comparte el mismo radio de convergencia $r=1$ de la serie original (Clases).
Para los extremos se tiene en $x=1\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge (es la serie armónica) y para $x=-1\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ que converge por **Leibnitz**. Así, para $f'(x)\quad r=1$ y $I_c=[-1,1)$. **(1.0 pto.)**
Para $f''(x)=\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{n}$ el radio de convergencia es nuevamente $r=1$ y para los extremos quedan las series $\sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}\ \wedge\ \sum\limits_{i=2}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^{n-2}}{n}$ ambas divergentes porque $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)=1\neq 0$.
Sigue que para $f''(x), r=1$ y $I_c=(-1,1)$. **(1.0 pto.)**

ii) $f(x)=ln(3+x)$
Se sabe que la serie de derivadas debe representar a.

$$f'(x)=\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}\ \frac{1}{1+(x/3)}$$

y esta última, por interpretación de la serie $\underbrace{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x},|x|<1}_{\textbf{(Clases)}}$ queda $f'(x)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{3}\right)^n$

$\Rightarrow f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}$ con radio de convergencia $r=3$. **(0.5 ptos.)**

Entonces puede integrarse en $[0, x], x < 3$, es decir

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^n}{3^{n+1}} \Rightarrow f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{3^{n+1}} dt$$

$$\Rightarrow f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \bigg|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$$

Además, de $f(x) = ln(3 + x) \Rightarrow f(0) = ln3$.

Sigue que $\boxed{f(x) = ln3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}$. **(1.5 ptos.)**

Nota. También, por integración directa $f(x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{3^{n+1}} + k$ y determinar k imponiendo $f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} + k$ así $k = f(0) = ln3$.

El radio de convergencia es $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{A_{n+1}}{A_n} \right| = \left| \frac{x}{3} \right| < 1$, así $r = 3$ y para el intervalo de convergencia, los extremos quedan $x = 3$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ que converge por **Leibnitz** y para

$x = -3$ $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ que diverge (serie armónica)

Entonces $r = 3$ y $I_c = (-3, 3]$. **(1.0 pto.)**

Problema 2

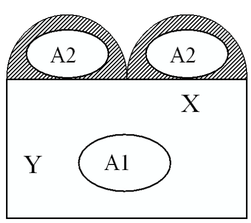
i) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admiten segunda derivada continua, f es decreciente y concava en $\mathbb{R}$ y g es decreciente y convexa en $\mathbb{R}$.
Entonces $f'(x), g'(x), f''(x), g''(x)$ existen $\forall x \in \mathbb{R}$ y $f'(x) \leq 0, g'(x) \leq 0, f''(x) \leq 0$ y $g''(x) \geq 0$ por crecimientos y concavidades de la hipotesis.
Así $(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{\leq 0} \cdot \underbrace{f'(x)}_{\leq 0} \geq 0$, es decir $g \circ f$ es creciente en $\mathbb{R}$. **(0.7 ptos.)**

Además $(g \circ f)''(x) = (g'(f(x)) \cdot f'(x))' = \underbrace{g''(f(x))}_{\geq 0}\underbrace{(f'(x))^2}_{\geq 0} + \underbrace{\underset{\leq 0}{g'(f(x))} \cdot \underset{\leq 0}{f''(x)}}_{\geq 0} \geq 0.$

De modo que $(g \circ f)''(x) \geq 0$, es decir, $g \circ f$ es convexa. **(0.8 ptos.)**

ii) $H(x) = \int_{1/x}^{x^3} \frac{dt}{e^{t^2}+1}$.
Según el TFC., $H'(x) = \frac{1}{e^{x^6}+1}(x^3)' - \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}+1}\left(\frac{1}{x}\right)'$.
Así $H'(x) = \underbrace{\frac{3x^2}{e^{x^6}+1}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{e^{1/x^2}+1}}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} > 0$ en $\mathbb{R}^+$.
Es decir, $H(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. **(0.7 ptos.)**
Además $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \int_{1/x}^{x^3} \frac{dt}{e^{t^2}+1} = \int_0^\infty \frac{dt}{e^{t^2}+1}$ y por comparación $\frac{1}{e^{t^2}+1} < \frac{1}{e^{t^2}} = e^{-t^2}$ y la integral $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ es convergente y por lo tanto $\int_0^\infty \frac{dt}{e^{t^2}+1}$ converge, es decir $\lim\limits_{x\to\infty} H(x)$ EXISTE. **(0.8 ptos.)**
Nota. La convergencia de $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ puede aceptarse (Clases) o bien $\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \int_0^1 e^{-t^2}dt + \int_1^\infty e^{-t^2}dt$ en que $e^{-t^2} < \frac{1}{t^2} \quad \forall x \in [1, \infty)$.
Así $\int_0^1 + \int_1^\infty$ convergen de donde $\int_0^\infty e^{-t^2}dt$ converge.

iii)



Para las dimensiones t, y indicadas la luminosidad de la parte rectangular se puede asociar a 1 y la de los semicirculos a 1/2.
De esta forma, las luminosidades son equivalentes a las respectivas áreas.

Entonces $A =$ Luminosidad $= A_1 \cdot +2 \cdot A_2 \cdot \frac{1}{2}$.
Así $A = 2xy + \pi\frac{x^2}{8} \quad (A(x,y))$.
Además Perímetro $= L = 2y + 2x + 2 \cdot \frac{\pi x}{2} = 2y + (\pi+2)x$ es decir $\boxed{y = \dfrac{L-(\pi+2)x}{2}}$
Así $A(x) = 2x\frac{L-(\pi+2)x}{2} + \frac{1}{8}\pi x^2 = Lx + \left(\frac{1}{8}\pi - \pi - 2\right)x^2$
$\Rightarrow A(x) = -\frac{7\pi+16}{8}x^2 + Lx$. **(1.5 ptos.)**
Sigue que $A'(x) = -\frac{7\pi+16}{4}x + L$ y $A'(x) = 0$ si $x = \frac{4L}{7\pi+16}$.
Además $A''(x) = -\frac{7\pi+16}{4} < 0$, es decir $x = \frac{4L}{7\pi+16}$ es punto de máximo.
Entonces las dimensiones son $x = \frac{4L}{7\pi+16}$ y $y = \frac{L-(\pi+2)\frac{4L}{7\pi+16}}{2} = \frac{(3\pi+8)L}{2(7\pi+16)}$ **(1.5 ptos.)**

Nota. No se exige $\begin{cases} x \approx 0.105\ L \\ y \approx 0.229\ L \end{cases}$

Problema 3

i) Calcule $I = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1+(\sqrt{x^2+1})^3}}$.

Por sustitución $u = x^2+1, du = 2xdx$.

I queda: $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u+u^{3/2}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u(1+\sqrt{u})}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{(1+\sqrt{u})}}$ nuevamente por sustitución $t = \sqrt{u}; dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. **(0.5 ptos.)**

Así $I = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \int (1+t)^{-1/2}dt = 2\sqrt{1+t} + C$.

Entonces $I = 2\sqrt{1+\sqrt{x^2+1}} + C$. **(1.5 ptos.)**

ii) $I = \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x^{3/2}-x^2}}$. Según la indicación $x = u^2$

dx=2udu.

Cambiando variable y límites, I queda

$$I = \int_0^2 \frac{2udu}{\sqrt{2u^3-u^4}} = \int_0^2 \frac{2udu}{u\sqrt{2u-u^2}} = 2\int_0^2 \frac{du}{\sqrt{2u-u^2}}$$

Entonces I es impropia de 2^a especie con intengrando indefinido en $u = 0$ y $u = 2$. **(0.5 ptos.)**

Entonces $I = \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}}$ que es convergente por comparación o por regla de convergencia $\lim_{u\to 0} u^\alpha \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0 \;\wedge\; \alpha = \frac{1}{2} < 1$ y $\lim_{u\to 2}(2-u)^\alpha \frac{1}{\sqrt{u}\sqrt{2-u}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$ y $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. **(1.0 pto.)**

O equivalentemente usando la definición (Integrando)

Se acepta como valido $\begin{cases} I = 2\int_0^2 \frac{du}{\sqrt{2u-u^2}} = 2\int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} = 2\operatorname{arc\,sen}(u-1)\Big|_0^2 = 2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ \text{Así , } I \text{ converge a } I = 2\pi \end{cases}$ **(0.5 ptos.)**

Nota. En forma rigurosa.

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} &= \int_{0^+}^1 \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} + \int_1^{2^-} \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} \\ &= \lim_{t\to 0}\int_t^1 \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} + \lim_{s\to 2}\int_1^s \frac{du}{\sqrt{1-(u-1)^2}} \\ &= \lim_{t\to 0}\operatorname{arc\,sen}(u-1)\Big|_t^1 + \lim_{s\to 2}\operatorname{arc\,sen}(u-1)\Big|_1^s = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Observación.

Puede calcular directamente y ratificar la convergencia con el valor finito de la integral. **(1.5 ptos.)**

iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ La longitud de arco es

$s = 4\int_0^a \sqrt{1+(y')^2}dx$

(4 veces el 1^{er} cuadrante por simetría)

$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \Rightarrow y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Entonces $s = 4\int_0^a \sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx$ o bien $s = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}dx$. **(0.5 ptos.)**

Para la elipse de semiejes $\lambda \cdot a$ y $\lambda \cdot b$ la longitud total será

$$s_\lambda = 4\int_0^{\lambda a} \sqrt{\frac{\lambda^4a^4+(\lambda^2b^2-\lambda^2a^2)x^2}{\lambda^2a^2(\lambda^2a^2-x^2)}}dx$$

Simplificando $s_\lambda = 4\int_0^{\lambda a} \sqrt{\frac{\lambda^2 a^2 + (b^2 - a^2)x^2}{a^2(\lambda^2 a^2 - x^2)}} dx$ y cambiando variables $x = \lambda y; dx = \lambda dy$ queda

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$
$$x = \lambda a \Rightarrow y = a$$

$$s_\lambda = 4\int_0^{a} \sqrt{\frac{\lambda^2 a^2 + (b^2 - a^2)\lambda^2 y^2}{a^2(\lambda^2 a^2 - \lambda^2 y^2)}} \lambda dy$$

Simplificando nuevamente queda

$$s_\lambda = 4\lambda \int_0^{a} \sqrt{\frac{a^2 + (b^2 - a^2)y^2}{a^2(a^2 - y^2)}} dy = \lambda \cdot \left(\underbrace{4\int_0^{a} \sqrt{\frac{a^2 + (b^2 - a^2)y^2}{a^2(a^2 - y^2)}} dy}_{s} \right)$$

Así $\boxed{s_\lambda = \lambda \cdot s}$ **(1.5 ptos.)**