Pauta Examen 2^a Fecha, MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Diciembre 2005

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Pauta Problema 1

a) Calcule

i) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx$

$$\text{Partes } u = x^2 \to du = 2xdx \qquad \text{Partes } u = x \to du = dx$$
$$dv = \operatorname{sen} x dx \to v = -\cos x \qquad dv = \cos x dx \to v = \operatorname{sen} x$$

$\therefore \quad \int x^2 \operatorname{sen} x dx = \cdot x^2 \cos x + 2[x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx] + C.$
Así $\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$ **(1.0 pto.)**

ii) $\int \frac{\cos x dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$
Sustitución $u = \operatorname{sen} x, du = \cos x dx.$
Entonces $\int \frac{\cos x dx}{1+\operatorname{sen}^2 x} = \operatorname{arctg} (\operatorname{sen} x) + C.$ **(1.0 pto.)**

iii)

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = \int_0^2 \underbrace{\left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right]}_{\substack{\text{Fracciones parciales}\\ \text{o cualquier forma}}} dx = \Big[ln|x+1| - ln|x+2| \Big]_0^2$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x+1)(x+2)} = ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_0^2 = ln\frac{3}{4} - ln\frac{1}{2} = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$ **(1.0 pto.)**

b) Calcule

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{e^{x^2}-1} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overbrace{\operatorname{sen} x + x\cos x}^{0}}{\underbrace{2xe^{x^2}}_{0}} \overset{\text{L'Hop}}{=} \lim \frac{2\cos x - x \operatorname{sen} x}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}} = 1.$

Así $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{e^{x^2}-1} = 1.$ **(1.5 ptos.)**

ii) $\frac{d}{dx}\left[\int_0^{e^{xln(1-\sqrt{x})}} t^2 dt\right] = \left(e^{xln(1-\sqrt{x})}\right)^2 \cdot [e^{xln(1-\sqrt{x})}]'$
$= e^{2xln(1-\sqrt{x})}\left(ln(1-\sqrt{x}) + x\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}\right) e^{xln(1-\sqrt{x})}$
$= \underbrace{e^{3xln(1-\sqrt{x})}}\left(ln(1-\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})}\right)$

También $= (1-\sqrt{x})^{3x}\left(ln(1-\sqrt{x}) - \frac{\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})}\right)$ **(1.5 ptos.)**

Eventualmente puede hacer $\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \to$ y luego evaluar y derivar.

Problema 2

a) i) $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$. Radio e Intervalo de convergencia.

Podemos usar $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)nx^{n+1}}{n(n-1)x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{n^2-n} = |x| < 1.$

Así, radio de convergencia es $r=1$ y el intervalo provisorio $(-1,1)$. **(0.5 ptos.)**

En los extremos, para $x=1$ $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)$ diverge pues $\lim_{n\to\infty} n(n-1) \not\to 0$ y en

$x=-1$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)n$ tambien diverge $((-1)(n-1)n \not\to 0)$.

Entonces el intervalo de convergencia queda $(-1,1)$. **(0.5 ptos.)**

ii) Debe observarse que los coeficientes de $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$ sugieren doble derivación de

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad |x|<1.$

Derivando $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad |x|<1.$ **(0.5 ptos.)**

Derivando nuevamente

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{2}{(1-x)^3} \quad |x|<1$$

Ahora se puede multiplicar por x^2 o separar dentro de suma.

Así $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} \quad |x|<1$ en donde las series derivadas conservan el radio de convergencia $r=1$. **(1.5 ptos.)**

iii) Para la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n}$ basta hacer $x=\frac{1}{2}$ en el resultado de (ii) advirtiendo su validez ya que $\frac{1}{2}\in(-1,1)$.

Así $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n} = \frac{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$ **(0.5 ptos.)**

Para $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$ puede usarse lo anterior $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 4.$

Es decir $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = 4 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ y de la primera derivada con $x=\frac{1}{2}$ se tiene

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2$ (se multiplicó por $\frac{1}{2}$) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n} + \frac{1}{2} = 2$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2-\frac{1}{2}.$

De lo anterior $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 4 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = 4 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = 4 + \left(2-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} - \frac{1}{2} = 4+2-\frac{1}{2}.$

Así $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n} = 6.$ **(0.5 ptos.)**

b) $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} \quad \forall x\in\mathbb{R}.$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} = f(x) = 0$ (nula por acotada $\forall x\in\mathbb{R}$).

Así $f_n(x) \overset{\text{c.p}}{\to} f(x) = 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$ **(0.5 ptos.)**

Ahora $d_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right| \to 0$ o bien $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}\right| \leq \frac{x}{n} < \varepsilon$ $(\forall n > n_0$ algún $n_0)$.

De modo que $f_n(x) \overset{\text{c.u}}{\to} f(x) = 0$ en $\mathbb{R}$. **(1.0 pto.)**

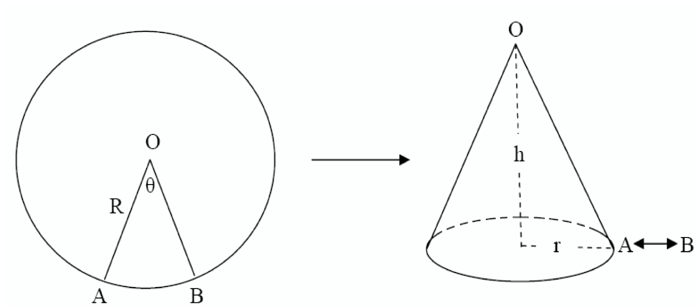
Es decir la convergencia de $f_n(x)$ es puntual y uniforme a $f(x) = 0$.

Para $f_n'(x) = \frac{n\cos(nx)}{n} = \cos(nx)$.

Se tiene que $\cos(nx)$ es acotada pero no convergente, lo que es suficiente para establecer que $f_n'(x) = \cos(nx)$ no converge puntual ni uniformemente. **(0.5 ptos.)**

OBSERVAR que la "no" convergencia puntual implica la "no" convergencia uniforme.

Problema 3



i) Si el radio basal del cono es r, su perímetro es $2\pi r$ y este debe ser igual al arco sumplementario de $\widehat{OAB}$ en la circunferencia de radio R.
Todo arco que subtiende un ángulo θ mide $R\theta$.
Así $2\pi r = 2\pi R - R\theta \Rightarrow r = R\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)$. **(0.5 ptos.)**

ii) Basta observar que la generatriz OA del cono deber valer R de donde en el triángulo rectangulo OCA se tiene.

$$\overline{OA}^2 = R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - R^2\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2$$

Sigue que $h = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$. **(0.5 ptos.)**

iii) El volumen del cono es $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.
Reemplazando $V = \frac{1}{3}\pi R^3\left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\theta}{2\pi}\right)^2}$ y con la sustitución $x = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ queda $V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2\sqrt{1 - x^2}$. **(0.5 ptos.)**

iv) Para el análisis de $V(x) = \frac{1}{3}\pi R^3 x^2\sqrt{1 - x^2}$ se tiene:
Dom : $V(x)$: Debe cumplirse que $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-1, 1]$.
Ceros: Claramente son ceros $x = 0, x = 1, x = -1$.
Signos de $V(X)$: Es inmediato que $V(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$.
Paridad: $V(x) = V(-x)$, es decir $V(x)$ es función para y por lo tanto simétrica con respecto al eje OY. **(1.0 pto.)**
Calculo de $V'(x) : V'(x) = \frac{1}{3}\pi R^3\left[2x\sqrt{1 - x^2} - x^2\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$\Rightarrow V'(x) = \frac{1}{3}\pi R^3\frac{2x(1 - x^2) - x^3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Así $V'(x) = \frac{1}{3}\pi R^3\frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **(1.0 pto.)**
Con esto se concluye que $V'(x) = 0$ si $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ y $V(x)$ no es diferenciable en $x = \pm 1$.
Crecimiento: Basta estudiarlo en $[0, 1]$ por la simetría de $V(x)$.

x	-1		$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		1
$V'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			máximo		mínimo		máximo		

(1.0 pto.)

Como $x = 1 - \frac{\theta}{2\pi}$ y $0 < \theta < 2\pi$ se concluye que $0 < x < 1$.
Así $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ es punto de máximo (en este caso es absoluto). **(1.0 pto.)**

v) Para el volumen máximo resulta

$$V\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{3}\pi R^3\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}=\frac{1}{3}\pi R^3\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Entonces $V_{\text{máx}}=\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$ y $1-\frac{\theta}{2\pi}=\sqrt{\frac{2}{3}}\Rightarrow\theta=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$ **(0.5 ptos.)**