Examen de segunda fecha, MA12A CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Año 2006 (29 de Diciembre)

P1.

a) *(3 ptos.)* Consideremos la función g definida por la regla

$$g(x) = \operatorname{sen} x \int_0^x f(t) \cos t \, dt - \cos x \int_0^x f(t) \operatorname{sen} t \, dt,$$

donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.

Derivando se tiene que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + \operatorname{sen} x f(x) \cos x \\ &\quad + \operatorname{sen} x \int_0^x f(t) \operatorname{sen} t \, dt - \cos x f(x) \operatorname{sen} x \\ &= \cos x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + \operatorname{sen} x \int_0^x f(t) \operatorname{sen} t \, dt \end{aligned}$$

Derivando una vez más:

$$\begin{aligned} g''(x) &= -\operatorname{sen} x \int_0^x f(t) \cos t \, dt + \cos x f(x) \cos x \\ &\quad + \cos x \int_0^x f(t) \operatorname{sen} t \, dt + \operatorname{sen} x f(x) \operatorname{sen} x \\ &= -g(x) + f(x) \end{aligned}$$

Con esto se prueba que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $g''(x) + g(x) = f(x)$.

Evaluando en $x = 0$ se tiene que $g(0) = 0$, $g'(0) = 0$ y $g''(0) = f(0)$. Con esto, si $f(0) > 0$, entonces g tiene un mínimo local en $x = 0$.

b) *(3 ptos.)* Calculemos el límite

$$L = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{e}{4\pi}(4x^2 - \pi^2) + \int_x^{\pi/2} e^{\operatorname{sen} t} dt}{1 + \cos(2x)}$$

Claramente se trata de un límite de la forma $\frac{0}{0}$ que se puede estudiar usando la regla de L'Hôpital. Es decir

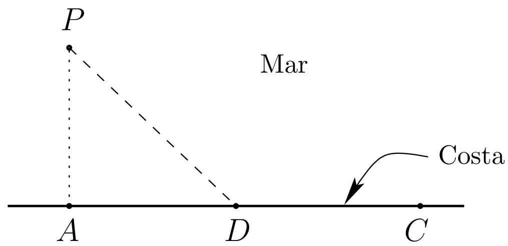
$$L = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{e}{4\pi} 8x - e^{\operatorname{sen} x}}{-2\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{2x}{\pi} e - e^{\operatorname{sen} x}}{-2\operatorname{sen}(2x)}$$

Nuevamente se trata de un límite de la forma $\frac{0}{0}$ que se puede estudiar usando la regla de L'Hôpital. Es decir

$$L = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\frac{2}{\pi} e - e^{\operatorname{sen} x} \cos x}{-4 \cos(2x)} = \frac{e}{2\pi}$$

P2.

a) *(3 ptos.)* En la figura se muestra un pescador P que se encuentra en su bote a 6 km de la costa (mar adentro). A es la proyección perpendicular de P sobre la costa. El pescador debe dirigirse a una caleta C ubicada sobre la costa a 13 km del punto A. Determine en qué punto D debe desembarcar el pescador, de modo que si rema de P a D y luego camina de D a C, minimiza el tiempo total de viaje, sabiendo que rema a una velocidad de 4 km/hr y camina por la costa a una velocidad de 5 km/hr.



Solución: Si x es la distancia entre A y D entonces, el tiempo que demora el pescador en su viaje es:

$$T(x) = \frac{\sqrt{36+x^2}}{4} + \frac{13-x}{5}$$

Derivando se tiene que

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{36+x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, $T'(x) = 0$ ssi $5x = 4\sqrt{36+x^2}$, es decir, $x > 0$ y $25x^2 = 36 * 16 + 16x^2$, o sea $x = 8$.

Para verificar que el punto es de mínimo tiempo, derivamos una vez más.

$$T''(x) = \frac{\sqrt{36+x^2} - x\frac{x}{\sqrt{36+x^2}}}{4(36+x^2)} = \frac{36}{4(36+x^2)^{3/2}}.$$

Como esta derivada es siempre positiva, el punto encontrado es de mínimo global.

b) *(3 ptos.)* Encuentre el valor de $\alpha \in (0,1)$ que maximiza el área de la región R encerrada entre la curva $y = x^\alpha$, el eje OY, la recta $x = 1$ y la recta tangente a la curva por $x = 1$.

Solución:

La recta tangente a x^α en $x = 1$ es:

$$y = 1 + \alpha(x-1)$$

Por lo tanto el área a maximizar es

$$A = \int_0^1 (1 + \alpha(x-1) - x^\alpha)dx = 1 + \alpha(\frac{1}{2} - 1) - \frac{1}{\alpha+1} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{2(\alpha+1)}$$

Calculemos A'

$$A' = \frac{(1-2\alpha)(\alpha+1) - \alpha(1-\alpha)}{2(\alpha+1)^2} = \frac{1-2\alpha-\alpha^2}{2(\alpha+1)^2}$$

Los puntos críticos de esta función son cuando $\alpha = -1 \pm \sqrt{2}$. En nuestro caso nos interesa $\alpha = \sqrt{2} - 1$

Para verificar que el área es máxima, veamos la segunda derivada:

$$A'' = \frac{-2}{(\alpha+1)^3}$$

Como esta derivada es negativa en $(0,1)$, el punto encontrado es máximo

P3.

a) *(2.0 ptos.)* Para encontrar el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum \dfrac{x^n}{n\ln(n)}$ usamos el criterio del cociente:

$$\lim_n |x| \frac{n\ln(n)}{(n+1)\ln(n+1)} = |x|$$

Con esto, el radio de convergencia de la serie es $r = 1$.

Ahora estudiamos los extremos. En $x = 1$ la serie queda $\sum \dfrac{1}{n\ln(n)}$, la que se puede estudiar por el criterio integral ya que $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ es decreciente y positiva para $x > 1$. Para el estudio de $\int_0^\infty \frac{1}{x\ln x}dx$ basta ver que la primitiva es $\ln(\ln(x)) + C$, la cual diverge para $x \to \infty$. Por lo tanto la serie es divergente.

En $x = -1$ la serie queda $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$, la que se puede estudiar por el criterio de Leibnitz ya que $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ es decreciente y positiva. Usando este criterio, la serie resulta ser convergente.

Por lo tanto, el dominio de convergencia es $[-1, 1)$.

b) *(2.0 ptos.)* El volumen del sólido de revolución engendrado por la rotación en torno al eje OY de la región del primer cuadrante, encerrada bajo la curva $y = xe^{-x^3}$ se calcula mediante la siguiente integral

$$V_{OY} = 2\pi \int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$$

Usando la sustitución $u = x^3$, con $du = 3x^2dx$, se calcula la primitiva:

$$\int x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3}\int e^{-u} du = -\frac{1}{3}e^{-x^3} + C$$

Evaluando en los límites de integración se obtiene que

$$V_{OY} = -\frac{2\pi}{3} \lim_{b\to\infty} e^{-x^3}\Big|_0^b = \frac{2\pi}{3}$$

c) *(2.0 ptos.)* La serie de potencias de e^x es $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!}$. Por lo tanto, multiplicando por x se obtiene que

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Integrando directamente f por partes se tiene que

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e-1) = 1.$$

Integrando la serie de potencias se tiene que

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n!}dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^{n+2}}{(n+2)n!}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)n!}.$$

Con esto se concluye que $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+2)n!} = 1$