Examen 2ª Fecha, MA12A CALCULO
PAUTA PROBLEMA 1

$$f(x) = e^{1/x}(1 + 1/x)$$

i) Claramente Dom $f : \mathbb{R} - \{0\}$ y único cero $x = -1$. (0.5 ptos.)
Signos de $f : f(x) > 0$ si $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$ es decir
$f(x) > 0$ si $(x > -1 \wedge x > 0) \vee (x < -1 \wedge x < 0) \Leftrightarrow (x > 0) \vee (x < -1)$.
De modo que $f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (0, \infty) \wedge f(x) < 0$ en $(-1, 0)$ (0.5 ptos.)

ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \to \infty \cdot \infty = \infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\overbrace{1 + 1/x}^{-\infty}}{\underbrace{e^{-1/x}}_{\infty}} \overset{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-1/x^2}{+\frac{1}{x^2}e^{-1/x}} = 0^-$$

Con esto, f es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ (Producto y composición de continuas) con discontinuidad irreparable en $x = 0$. (1.0 pto.)

iii) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{1/x}\left[1 + \frac{1}{x}\right]$ $\begin{array}{l}\longrightarrow 1^+ \text{ si } x \to \infty \\ \longrightarrow 1^- \text{ si } x \to -\infty\end{array}$
De modo que $Y = 1$ es asíntota horizontal.
Además, de (ii), f tiene asíntota vertical en 0^+ (1.0 pto.)

iv) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) + e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(2 + \frac{1}{x}\right) = -e^{1/x}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$ (0.5 pto.s)
De modo que $f'(x) = 0$ si $x = -\frac{1}{2}$ y f no es diferenciable en $x = 0$.

Crecimiento

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$(0, \infty)$
f'	< 0	> 0	< 0
	decrece	crece	decrece

$\therefore f$ tiene un mínimo absoluto en $x = \frac{1}{2}$

(0.7 ptos.)

v) $f''(x) = \frac{1}{x^2}e^{1/x}\left(\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) - e^{1/x}\left(-\frac{4}{x^3} - \frac{3}{x^4}\right) = \frac{e^{1/x}}{x^5}(4x^2 + 5x + 1)$
Así, $f''(x) = 0$ si $4x^2 + 5x + 1 = 0$, es decir $x = -1$ y $x = -\frac{1}{4}$ y $f''(x)$ no existe en $x = 0$(0.6 ptos.)

Concavidades

x	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, -\frac{1}{4}\right)$	$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$	$(0, \infty)$
f''	< 0	> 0	< 0	> 0
	concava	convexa	concava	convexa

$\therefore x = -1$ y $x = -\frac{1}{4}$ son ptos de inflexión
(0.7 ptos.)

vi) Valores Principales

x	$f(x)$
-1	0
$-1/2$	$-1/e^2$
$-1/4$	$-3/e^4$

Nota: El gráfico no está a escala Recorrido: $-\frac{1}{e^2}, 1\ \cup (1, \infty)$ (0.5 ptos.)

Examen 2^{a} Fecha, MA12A CALCULO
PAUTA PROBLEMA 2

i) $\int_1^\infty e^{-x} ln\, x\, dx$. Por comparación, se sabe que $ln\, x \leq x - 1 < x, x > 0$ de modo que $e^{-x} ln\, x < e^{-x} x$.
Además $\int_1^\infty x\, e^{-x}\, dx = \int_1^\infty \frac{x}{e^x} dx$ converge por comparación por cuociente con $\frac{1}{x^2}$, por integración directa, o por criterio de la integral impropia $\left(\sum \frac{ln\, n}{e^n}\right)$
También puede integrarse por partes partiendo de la integral original de la que se desprende una integral convergente. (1.0 pto.)

ii) Para $I = \int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen} x\, dx$ se tiene $|e^{-sx} \operatorname{sen} x| \leq e^{-sx} \qquad \forall x$
y $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \lim\limits_{x\to\infty} \int_0^b e^{-sx} dx = \lim\limits_{x\to\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sx}\right)\Big|_0^b = \frac{1}{s}$ converge.
De modo que $\int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen} x\, dx$ es absolutamente convergente y analogamente $\int_0^\infty e^{-sx} \cos x\, dx$ es absolutamente convergente. (1.0 pto)
Para el cálculo, puede procederse por partes

$$I = \int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen} x\, dx = -\frac{\cos x}{e^{sx}}\Big|_0^{\to\infty} - s \int_0^\infty e^{-sx} \cos x\, dx = 1 - s \int_0^\infty e^{-sx} \cos x\, dx$$

$$u = e^{-sx} \to du = -s\, e^{-sx} dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\, dx \to v = -\cos x$$

Así $I = 1 - s \int_0^\infty e^{-sx} \cos x\, dx = 1 - s \cdot J \quad (*)$
y $J = \int_0^\infty e^{-sx} \cos x\, dx = \frac{\operatorname{sen} x}{e^{sx}}\Big|_0^{\to\infty} + s \int_0^\infty e^{-sx} \operatorname{sen} x\, dx = s \cdot I$
$u = e^{-sx} \to du = -s\, e^{-sx} dx$
$dv = \cos x\, dx \to v = \operatorname{sen} x$
De modo que $I = 1 - s\, J = 1 - s^2 I \Rightarrow I = \frac{1}{s^2+1}$
y de (*) $\quad J = \frac{1-I}{s} = \frac{1}{s}\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{s}{s^2+1}$ (1.0 pto.)

iii) $2\int_a^x f(t) dt = 2 \operatorname{sen} x - 1$ Por T.F.C. queda $(\ )' \to 2f(x) = 2\cos x$
Entonces $\boxed{f(x) = \cos x}$ y $2\int_a^x \cos t\, dt = 2 \operatorname{sen} x - 1 \Rightarrow 2(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a) = 2 \operatorname{sen} x - 1$

$$\Rightarrow -2 \operatorname{sen} a = -1 \Rightarrow \operatorname{sen} a = \frac{1}{2} \quad \therefore \boxed{a = \frac{\pi}{6}}$$ (1.0 pto.)

iv) Basta rotar el arco entre x y $x + h$ en torno al eje OX
Así $S = 2\pi \int_x^{x+h} f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi \int_x^{x+h} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx$
$= 2\pi\, R \int_x^{x+h} dx = 2\pi\, R\, h = Sup$ en el cilindro (2.0 ptos.)

Examen 2^{a} Fecha, MA12A CALCULO
PAUTA PROBLEMA 3

a) $f_n(x) = n^2(1-x)x^n$ para $x \in [0,1]$

i) $f_n(0) = f_n(1) = 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} n^2(1-x)x^n = 0$ pués si $x \in (0,1), x = \frac{1}{q}\ q > 1$
Así $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{q^n}\big(1-\frac{1}{q}\big) = \big(1-\frac{1}{q}\big) \lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{n^2}{q^n}\big) = \big(1-\frac{1}{q}\big)\cdot 0 = 0$ (1.0 pto.)

ii) $d_n = \underset{x\in[0,1]}{Sup} \big|f_n(x) - f(x)\big| = \underset{x\in[0,1]}{Sup} (n^2(1-x)x^n) = \underset{x\in[0,1]}{Sup} f_n(x)$
Bastará determinar el máximo del $n^2(1-x)x^n$ para $x \in [0,1]$

$$f_n'(x) = n^2[-x^3 + (1-x)n\,x^{n-1}] = n^2\,x^{n-1}[-x + n(1-x)] = n^2\,x^{n-1}(n-(n+1)x)$$

(0.5 ptos.)

Así, $f_n'(x) = 0$ si $x = 0$ y $x = \frac{n}{n+1}$ en donde $x = 0$ genera mínimo pués $f_n(x) \geq 0$.
Entonces $f_n(x)$ max $= f_n\big(\frac{n}{n+1}\big) = n^2\big(1-\frac{n}{n+1}\big)\big(\frac{n}{n+1}\big)^n$
Es decir $f_n\big(\frac{n}{n+1}\big) = \frac{n^2}{n+1}\cdot\big(\frac{n}{n+1}\big)^n = n\big(\frac{n}{n+1}\big)^{n+1} =$ maximo $\quad \forall n \in I\!N$ (1.0 pto.)

iii) La convergencia será uniforme si

$$d_n = \underset{x\in[0,1]}{Sup}\big|f_n(x) - f(x)\big| \to 0, \text{ pero, en este caso}$$
$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\underbrace{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}_{\to e}} \to \infty$$

(0.5 ptos.)

Entonces $f_n(x) \overset{\text{c.u}}{\not\to} f(x)$ (no hay conv unif)

b) Por el criterio de DÁlembert (por ejemplo) se tiene.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{A_{n+1}}{A_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a^{n+1}x^{n+1}}{1+b^{n+1}}\cdot\frac{1+b^n}{a^n\cdot x^n}\right| = a|x| \lim_{(b>1)} \frac{1+b^n}{1+b^{n+1}} = a|x| \lim \frac{\frac{1}{b^n}+1}{\frac{1}{b^n}+b}$$

Así $\lim\limits_{n\to\infty}\big|\frac{A_{n+1}}{A_n}\big| = \frac{a}{b}|x|$ con lo cual R de conv$=R = \frac{b}{a}$ y
$I_c = \big(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\big) \to$ intervalo Provisorio (2.0 ptos.)
Para los extremos $x = \frac{b}{a} \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{1+b^n}$ que diverge pués $\frac{b^n}{1+b^n} \to 1 \neq 0$.
Analogamente $x = -\frac{b}{a} \to \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b^n}{1+b^n}$ pero $(-1)^n\frac{b^n}{1+b^n} \not\to 0$

$$\therefore I_c = \left(-\frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right)$$

(1.0 pto.)