Pauta Examen 2da fecha MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Puede obtenerse en `www.dim.uchile.cl` en formato ps o pdf.

P1.- Considere la función definida por $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$.

- **(i)** (0.5 ptos) Estudie dominio y encuentre un cero de f.
- **(ii)** (1 pto) Estudie asíntotas verticales y horizontales.
- **(iii)** (1 pto) Estudie asíntotas oblícuas.
- **(iv)** (1.5 pto) Calcule f' y demuestre que f es estrictamente creciente. Indicación: use que $\ln x \leq x - 1$, $\forall x > 0$.
- **(v)** (1 pto) Calcule f''. Estudie convexidad y encuentre puntos de inflexión.
- **(vi)** (1 pto) Haga un bosquejo del gráfico de esta función utilizando el análisis precedente.

Pauta P1.- **(i)** Dominio: $\mathbb{R}_+$. Un cero de f es $x = 1$ (es el único, pero eso se puede deducir solamente después de ver que la función es estrictamente creciente).

(ii) Asíntotas verticales y horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(x - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= -1 + \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

luego hay una asíntota vertical en $x = 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(x - 1 + \frac{\ln x}{x} \right) \\ &= +\infty, \end{aligned}$$

pues, usando L'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

luego no hay asíntotas horizontales.

(iii) Asíntotas oblícuas:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x^2} \right) \\ &= 1, \end{aligned}$$

pues, usando L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to+\infty} \left(-1 + \frac{\ln x}{x}\right) \\ &= -1. \end{aligned}$$

Luego hay una <u>asíntota oblícua</u> cuando $x \to +\infty$ y es la <u>recta</u> $y = x - 1$.

(iv) <u>Primera derivada</u>:

$$f'(x) = 1 + \frac{x\,\frac{1}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}.$$

<u>Crecimiento</u>: usando la indicación

$$\ln x \le x - 1 \Rightarrow -\ln x \ge 1 - x \Rightarrow x^2 + 1 - \ln x \ge x^2 - x + 2$$

La parábola $y = x^2 - x + 2$ es siempre positiva. En efecto, su mínimo se alcanza para x tal que $2x - 1 = 0$, esto es, en $x = 1/2$, lo que da $(1/2)^2 - 1/2 + 2 = 7/4 > 0$. Otra forma de razonar es decir que el discriminante es negativo $(-1)^2 - 8 = -7 < 0$ entonces las raíces son complejas y la parábola está estrictamente sobre el eje x.

En definitiva

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} \ge \frac{x^2 - x + 2}{x^2} > 0$$

lo que implica que f es estrictamente creciente.

(v) <u>Segunda derivada</u>:

$$f''(x) = \frac{x^2(-\frac{1}{x}) - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}.$$

La segunda derivada se anula si

$$-3 + 2\ln x = 0$$

esto es si

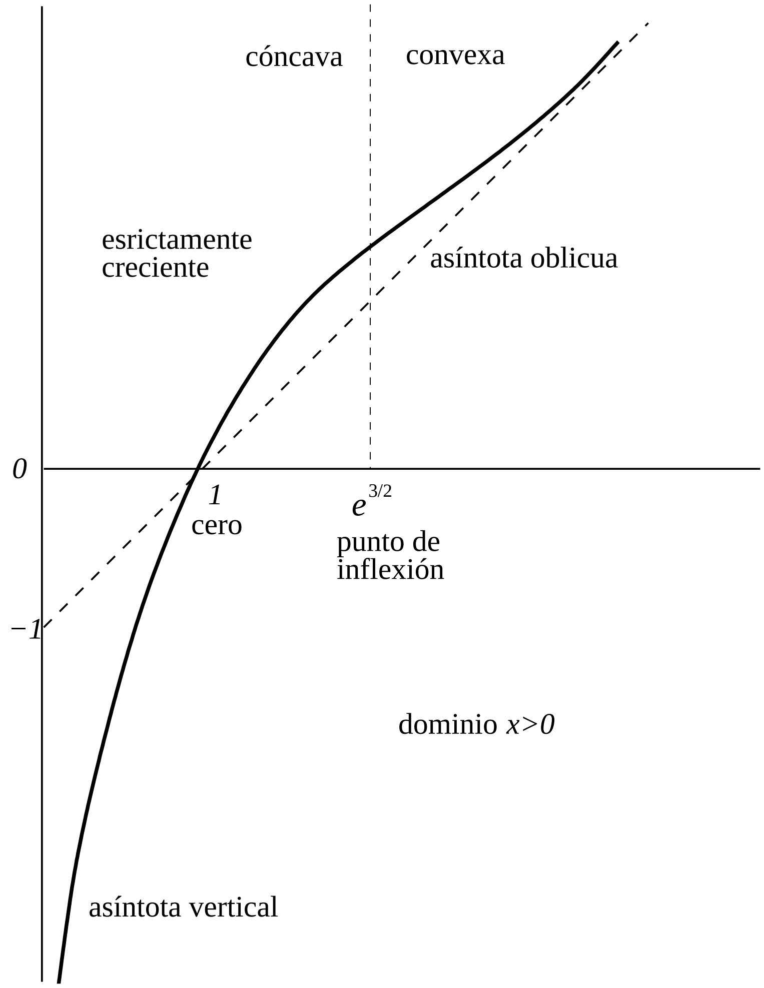
$$\ln x = \frac{3}{2}$$

y eso es para

$$x = e^{\frac{3}{2}}.$$

Si $x > e^{\frac{3}{2}}$ entonces $-3 + 2\ln x > 0$ y $f'' > 0$ esto es la curva es convexa.
Si $x < e^{\frac{3}{2}}$ entonces $-3 + 2\ln x < 0$ y $f'' < 0$ esto es la curva es cóncava.
Conclusión: $x = e^{\frac{3}{2}}$ es <u>punto de inflexión</u>.

(vi) <u>Gráfico</u>:



Puntaje P1:

(i)	**[0.25 pto]**	Dominio
	[0.25 pto]	Cero
(ii)	**[0.5 pto]**	Asíntota vertical
	[0.5 pto]	Asíntota horizontal
(iii)	**[0.5 pto]**	Pendiente asíntota oblícua
	[0.5 pto]	Coeficiente de posición asíntota oblícua
(iv)	**[0.5 pto]**	Cálculo de la primera derivada
	[0.5 pto]	Utilización de la indicación para llegar a una nueva cota
	[0.5 pto]	Análisis de la parábola y conclusión
(v)	**[0.5 pto]**	Cálculo de la segunda derivada
	[0.5 pto]	Análisis del signo de esta derivada y conclusión
(vi)	**[1pto]**	Gráfico (coherente con el análisis precedente en caso de errores)

P2.- **(i)** (3 ptos) Calcule las siguientes primitivas:

$$\int \ln(x)\,dx, \qquad \int \frac{\ln(x)}{x}\,dx, \qquad \int \frac{(\ln(x))^2}{x^2}\,dx.$$

(ii) Sea

$$I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\;dt$$

(a) (1.5 ptos) Demuestre que la integral $I(x)$ es convergente para $0 < x < 1$.

(b) (1.5 ptos) Calcule $I(x)$ para $0 < x < 1$.
Indicación: complete el cuadrado al interior de la raíz.

Pauta P2.- **(i)** La primera primitiva se puede obtener por partes:

$$\begin{aligned}\int \ln x\, dx &= \int 1 \cdot \ln x\, dx \\ &= -\int x\,\frac{1}{x}\,dx + x\,\ln x + C \\ &= -x + x\,\ln x + C = x(\ln x - 1) + C.\end{aligned}$$

(Si el alumno se sabe esta primitiva de memoria es válido, ya que hace parte de las primitivas básicas).
La segunda primitiva se puede obtener con el cambio de variables:

$$x = e^y, \quad dx = e^y\, dy$$

esto es

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\, dx &= \int \frac{y}{e^y} e^y\, dy \\ &= \int y\, dy = \frac{y^2}{2} + C \\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C.\end{aligned}$$

(Esta última primitiva también se puede obtener directamente por inspección).
En la tercera primitiva también conviene hacer el cambio de variables:

$$x = e^y, \quad dx = e^y\, dy$$

para obtener

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx &= \int \frac{y^2}{e^{2y}} e^y\, dy \\ &= \int y^2\, e^{-y}\, dy.\end{aligned}$$

que puede ser resuelta por partes:

$$\begin{aligned}\int y^2\, e^{-y}\, dy &= \int 2y\, e^{-y}\, dy - y^2\, e^{-y} + C \\ &= 2\int e^{-y}\, dy - 2y\, e^{-y} - y^2\, e^{-y} + C \\ &= -2\, e^{-y} - 2y\, e^{-y} - y^2\, e^{-y} + C \\ &= -\, e^{-y}(y^2 + 2y + 2) + C,\end{aligned}$$

de donde

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x^2}\, dx = -\frac{(\ln x)^2 + 2\ln x + 2}{x} + C.$$

Nota: También se puede integrar directamente por partes sin hacer el cambio de variables.

(ii) **(a)** La integral es impropia (de primera especie) en $t = 0$ (y no lo es en $t = x$ pues $x < 1$). Comparemos con

$$\int_0^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

que sabemos es convergente si $\alpha < 1$. Nos conviene tomar $\alpha = 1/2$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-t}} = 1$$

de modo que por comparación $I(x)$ es convergente.

(b) Completando cuadrado en la raíz:

$$t - t^2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4},$$

de donde

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\, dt = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}}\, dt = \int_0^x \frac{2}{\sqrt{1-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}}\, dt$$

haciendo ahora el cambio de variables

$$u = 2\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad du = 2\, dt,$$

si $t = 0$ entonces $u = -1$ y si $t = x$ entonces $u = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t-t^2}}\, dt &= \int_{-1}^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\ &= \arcsin\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) - \arcsin(-1) \\ &= \arcsin\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right) + \pi.\end{aligned}$$

Nota: La comparación con algún $0 < \alpha \leq 1/2$ también funciona.

Puntaje P2:

(i)	**[1 pto]**	Primera primitiva
	[1 pto]	Segunda primitiva
	[1 pto]	Tercera primitiva
(ii-a)	**[0.5 pto]**	Saber que $\int_0^x \frac{1}{x^\alpha}\, dx$ converge si $\alpha < 1$
	[1 pto]	Comparación con $\alpha = 1/2$ (o algún $\alpha < 1/2$)
(ii-b)	**[0.5 pto]**	Cambios de variables correctos, incluyendo cambio de límites
	[1 pto]	Cálculo de la integral definida

P3.- **(i)** (1.5 ptos) Encuentre el radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n.$$

(ii) (1.5 ptos) Use el criterio integral (verificando las hipótesis para aplicarlo) para estudiar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

(iii) Dada una función $f : I\!R \to I\!R$ continua, se define la función

$$y(x) = \sin(x) \int_0^x f(t)\cos(t)\,dt - \cos(x) \int_0^x f(t)\sin(t)\,dt.$$

(a) (1 pto) Justifique por qué las siguientes derivadas (con respecto a la variable x) existen y calcúlelas:

$$\left(\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt\right)', \qquad \left(\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt\right)'.$$

(b) (1 pto) Calcule y', y'' y verifique la identidad $y'' + y = f$.

(c) (1 pto) Pruebe que si $f(0) > 0$, entonces y tiene un mínimo local en $x = 0$.

Pauta P3.- **(i)** Para calcular el radio de convergencia, calculemos primero la razón

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}} \\
&= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2}\,\frac{(n!)^2}{(2n)!} \\
&= \frac{n!\,n!\,(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4$$

y el radio de convergencia es

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{1}{4}.$$

Nota: No se pide analizar los extremos del intervalo de convergencia.

(ii) La función

$$f(x) = \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

es no negativa, decreciente e integrable (por ser continua) en intervalos de la forma $[1, x]$, $x \geq 1$, de modo que podemos aplicar el criterio integral. Estudiemos la integral impropia (de segunda especie)

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

haciendo el cambio de variables

$$u = \sqrt{x}, \quad du = \frac{1}{2\sqrt{u}} dx,$$

y si $x = 1$ entonces $u = 1$ y si $x \to +\infty$ también $u \to +\infty$ de modo que los límites de integración no cambian. Calculamos entonces:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x)\, dx &= \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \\ &= 2\int_1^{+\infty} e^{-u}\, du \\ &= -2e^{-u}|_1^{+\infty} \\ &= 2/e - 2 \lim_{u\to+\infty} e^{-u} \\ &= 2/e \end{aligned}$$

pues

$$\lim_{u\to+\infty} e^{-u} = 0.$$

El criterio integral nos dice que si la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge, entonces la serie pedida también converge.

(iii) **(a)** Para justificar que las derivadas existen debemos utilizar el Teorema Fundamental del Cálcul (TFC): dado que f es continua en $\mathbb{R}$, las funciones $f(t)\cos(t)$, $f(t)\sin(t)$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ y por lo tanto las dos integrales son derivables con respecto a x. Sus derivadas son respectivamente:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^x f(t)\cos(t)\, dt\right)' &= f(x)\cos(x) \\ \left(\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt\right)' &= f(x)\sin(x). \end{aligned}$$

Nota: una versión del TFC nos dice que si f es integrable, la función $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ es continua. Esta versión no es suficiente para justificar las derivadas. La otra versión nos dice que si además f es continua entonces F es (además de continua) derivable y su derivada es $F'(x) = f(x)$. Esta versión es la que debemos utilizar.

(b) Calculemos las derivadas de

$$y(x) = \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\, dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt.$$

Primera derivada. Utizando la regla de la derivada del producto y la parte (a) del problema obtenemos:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\, dt + \sin(x) f(t)\cos(x) + \\ &\quad \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt - \cos(x) f(x)\sin(x) \\ &= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\, dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\, dt. \end{aligned}$$

En definitiva

$$y' = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \sin(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt.$$

Segunda derivada. Del mismo modo que para la primera derivada, obtenemos

$$\begin{aligned}
y''(x) &= -\sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)f(t)\cos(x) + \\
&\quad \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt + \sin(x)f(x)\sin(x) \\
&= f(x)(\sin^2(x)+\cos^2(x)) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt \\
&= f(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Entonces

$$y'' = f(x) - \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt.$$

Recordemos que

$$y = \sin(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\sin(t)\,dt,$$

entonces sumando las expresiones para y y para y'', al cancelarse dos términos, se obtiene:

$$y'' + y = f.$$

(c) Si $f(0) > 0$, para ver que en $x = 0$ hay un mínimo local, una condición suficiente es verificar que

$$y'(0) = 0, \qquad y''(0) > 0.$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \cos(0)\int_0^0 f(t)\cos(t)\,dt + \sin(0)\int_0^0 f(t)\sin(t)\,dt = 1\cdot 0 + 0\cdot 0 = 0 \\
y''(0) &= f(0) - \sin(0)\int_0^0 f(t)\cos(t)\,dt + \cos(0)\int_0^0 f(t)\sin(t)\,dt = f(0) > 0.
\end{aligned}$$

Nota: también se puede usar la relación $y'' = f - y$ para deducir que $y''(0) = f(0) > 0$ luego de verificar que $y(0) = 0$. Sin embargo, la condición de punto crítico $y'(0) = 0$ hace uso de y'. Esto quiere decir que se puede hacer esta parte (c) independiente del cálculo de y'', pero habiendo calculado correctamente y'.
Nota: se puede también hacer referencia al Teorema de la primera derivada no nula de orden par y positiva.

Puntaje P3:

(i)	[**1 pto**]	Cálculo del límite del cuociente
	[**0.5 pto**]	Valor del Radio de Convergencia
		Si se ha dado una expresión correcta del Radio de Convergencia pero el valor no ha sido bien calculado a causa de un límite erróneo o no calculado, dar de todas formas estos [**0.5 pto**]
(ii)	[**0.3 pto**]	Verificación de hipótesis para usar el criterio integral ([**0.1 pto**]) cada una de las 3 hipótesis
	[**0.8 pto**]	Cálculo de la integral antes de tomar límite, incluyendo cambio de variables en el integrando y en los límites
	[**0.4 pto**]	Usar que $e^{-u} \to 0$ si $u \to +\infty$ y concluir convergencia de la integral y de la serie.
		Si por error el alumno encuentra que la integral diverge y deduce en consecuencia que la serie también diverge dar estos [**0.4 pto**] ya que el razonamiento es correcto
(iii-a)	**0.2** [**pto**]	Justificación de hipótesis del TFC
		Basta que el alumno mencione que las derivadas existen porque f es continua
	0.8 [**pto**]	Cálculo de las dos derivadas (**0.4** [**pto**] cada una)
(iii-b)	**0.4** [**pto**]	Cálculo de y'
	0.4 [**pto**]	Cálculo de y''
	0.2 [**pto**]	Verificación de la identidad $y'' + y = f$
(iii-c)	**0.5** [**pto**]	Establecer condiciones suficientes de mínimo local
		Nota: el alumno podría hacer referencia al Teorema de la primera derivada no nula de orden par y positiva. Esto es correcto.
	0.5 [**pto**]	Verificar las dos condiciones, usar la hipótesis $f(0) > 0$