Pauta Examen MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

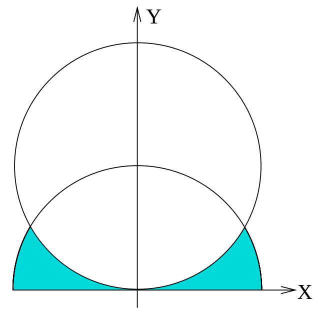
9 de Diciembre 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Esta Pauta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Para $r > 0$ se define la región $\mathcal{R}$ por:

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq r^2; \quad x^2+y^2-2ry \geq 0; \quad y \geq 0\}$$

(Ver Figura)



(a) (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX.
Ind: $V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

(b) (2 ptos.) Calcule la superficie del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OX (Superficie del sólido de la parte (a)).
Ind : $S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$

(c) (2 ptos.) Calcule el volumen del sólido engendrado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje OY.
Ind : Puede usar $V_{OY} = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$ u otro método.

Observación: En este problema se sugiere aprovechar simetrías, donde corresponda.

Pauta.- **(a)** Es preciso determinar el (o los) puntos de intersección de las circunferencias $x^2+y^2 = r^2$ y $x^2+y^2-2ry = 0$ (se usará en las tres partes).
Resolviendo el sistema, es inmediato que $r^2 - 2ry = 0 \Rightarrow y = \frac{r}{2}$ de donde $x^2 = \frac{3r^2}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{r\sqrt{3}}{2}$
Entonces los puntos comunes son $\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$ y $\left(\frac{-r\sqrt{3}}{2}, \frac{r}{2}\right)$
El volumen pedido es simétrico c/r al eje OY. Entonces bastará calcular el volumen engendrado por la rotación de la región achurada del primer cuadrante y duplicarlo.
Entonces, según indicación $V_{OX} = 2\left[\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f_1^2(x)dx + \pi \int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r} f_2^2(x)dx\right]$ en que la primera función que interesa se deduce de
$x^2+y^2-2ry = 0$, es decir $f_1(x) = \frac{2r-\sqrt{4r^2-4x^2}}{2} = r - \sqrt{r^2-x^2}$ considerando que $f_1(x)$ representa el simicirculo inferior en $x \in [0, \frac{r\sqrt{3}}{2}]$
Para $f_2(x)$, es inmediato que $f_2(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ para $x \in [\frac{r\sqrt{3}}{2}, r]$

Entonces

$$\begin{aligned}
V_{OX} &= 2\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}(r-\sqrt{r^2-x^2})^2dx+2\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})^2dx\\
&= 2\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\left(2r^2-x^2-2r\sqrt{r^2-x^2}\right)dx+2\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}(r^2-x^2)dx\\
&= 2\pi\left[2r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}+2\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}-4\pi r\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\sqrt{r^2-x^2}dx\\
\therefore V_{OX} &= 2\pi r^3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\right]-4\pi r\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\sqrt{r^2-x^2}dx
\end{aligned}$$

Utilizando la sustitución $x = r\operatorname{sen}\alpha$ (luego $dx = r\cos\alpha d\alpha$) se obtiene

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\sqrt{r^2-x^2} &= \int_0^{\pi/3}r^2\cos^2\alpha d\alpha=\frac{r^2}{2}\int_0^{\pi/3}[1+\cos 2\alpha]d\alpha\\
&= \frac{r^2}{2}\left[\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{sen}2\alpha\right]_0^{\pi/3}=\frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]
\end{aligned}$$

Entonces $V_{OX} = 2\pi r^3\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2}{3}\right]-2\pi r^3\left[\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$

$\therefore \boxed{V_{OX} = 2\pi r^3\left[\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{3}(\pi-2)\right]}$ (u otra forma algebraica).

(b) Paro el cálculo se requiere conocer $f_1'(x)$ y $f_2'(x)$
$f_1'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}, \quad f_2'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
Como en el caso (a), se puede aprovechar simetrías y calcular para el primer cuadrante y duplicar. Entonces

$$\begin{aligned}
S_{OX} &= 4\pi\int_0^{r\frac{\sqrt{3}}{2}}f_1(x)\sqrt{1+(f_1'(x))^2}dx+4\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}f_2(x)\sqrt{1+(f_2'(x))^2}dx\\
&= 4\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\left(r-\sqrt{r^2-x^2}\right)\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx-4\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx\\
&= 4\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}r\frac{r-\sqrt{r^2-x^2}}{\sqrt{r^2-x^2}}dx+4\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}r dx\\
&= 4\pi r^2\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}-4\pi r\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}}dx+4\pi r\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi r^2 \text{arcsen}\left(\frac{x}{r}\right)\Big|_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}} - \frac{4\pi r^2\sqrt{3}}{2} + 4\pi r\left(r - \frac{r\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= 4\pi r^2\frac{\pi}{3} - 4\pi r^2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \boxed{S_{OX} = 4\pi r^2\left[\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right]} \text{ (u otra forma algebraica).}
$$

(c) Al rotar c/r al eje OY no hay simetrías y por lo tanto el volumen no debe duplicarse. Entonces

$$
V_{OX} = 2\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}} x\left(r - \sqrt{r^2 - x^2}\right)dx + 2\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx
$$

$$
\Rightarrow V_{OY} = 2\pi r\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}} xdx - 2\pi\int_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}} x\sqrt{r^2 - x^2}dx + 2\pi\int_{\frac{r\sqrt{3}}{2}}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}dx
$$

Particularmente para $\int x\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\frac{1}{2}\int u^{1/2}du = -\frac{1}{3}u^{3/2} + C$ utilizamos la sustitución

$$
\begin{aligned}
u &= r^2 - x^2 \\
du &= -2xdx
\end{aligned}
$$

y si $x = \frac{r\sqrt{3}}{2} \Rightarrow u = \frac{r^2}{4},\ x = r \Rightarrow u = 0;\ x = 0 \Rightarrow u = r^2$ Con lo cual

$$
\begin{aligned}
V_{OY} &= 2\pi r\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\frac{r\sqrt{3}}{2}} + \frac{2\pi}{3}\,u^{3/2}\Big|_{r^2}^{r^2/4} - \frac{2\pi}{3}\,u^{3/2}\Big|_{r^2/4}^{0} \\
&= \pi r^3\left[\frac{3}{4} + \frac{1}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\right] \Rightarrow \boxed{V_{OY} = \frac{\pi r^3}{4}}
\end{aligned}
$$

<u>**Observación**</u>

La parte (c) se puede también resolver por el método disco.

$$
\begin{aligned}
V_{OY} &= \pi\int_0^{R/2}\left[f_1^{-1}(x)\right]^2 - \left[f_2^{-1}(x)\right]^2 dy = \pi\int_0^{r/2}[(r^2 - y^2) - (2ry - y^2)]dy \\
&= \pi\int_0^{R/2}(r^2 - 2ry) = \pi\left[r^2y - ry^2\right]_0^{r/2} \\
V_{OY} &= \frac{\pi r^3}{4}
\end{aligned}
$$

Asignación de puntajes P1

(a)	(2 ptos)
(0.5)	Escoger bién las funciones adecuadas y los límites de integración.
(0.5)	Separación correcta de integrales parciales y cálculo de polinómicas.
(0.7)	Cálculo correcto de la primitiva $\in \sqrt{r^2 - x^2}dx$ y evaluación.
(0.3)	Resultado final correcto salvo variaciones algebraicas.

(b)	(2 ptos)
(0.5)	Cálculo correcto de las derivadas de las funciones que intervienen.
(0.5)	Simplificación y separación en integrales parciales.
(0.7)	Reconocimiento, cálculo y evaluación de $\int \frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}$.
(0.3)	Resultado final correcto salvo variaciones algebraicas.

(c)	(2 ptos)
(0.5)	Planteamiento correcto de integrales, donde debe reconocer que en la rotación el volumen no se duplica (-0.2 si duplica).
(1.0)	Resolución y cálculo de $\int x\sqrt{r^2 - x^2}dx$ con límites correctos.
(0.5)	Resultado final correcto salvo variaciones algebraicas.

Si en la parte (c) se resuelve por el método del disco se evalúa asignando
1.0 ptos por plantemiento y simplificaciones.
1.0 ptos por integracion y resultado.

P2.- Estudiar completamente la función: $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, indicando:

- **(a)** (0.5 ptos.) Dominio, recorrido, ceros.
- **(b)** (1.0 ptos.) Continuidad, asíntotas de todo tipo.
- **(c)** (2.0 ptos.) Cálculo de $f'(x)$. Analice crecimientos. Encuentre máximos, mínimos (indique si son locales o globales).
- **(d)** (2.0 ptos.) Cálculo de $f''(x)$. Estudie concavidad, convexidad y puntos de inflexión.
- **(e)** (0.5 ptos.) Gráfico aproximado, señalando puntos principales.

Pauta.- **(a)**

- ∘ Dominio: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
- ∘ El recorrido de f es $\mathbb{R}$, pues, f es continua en $(-1,\infty)$ y $\lim\limits_{x\to -1^+} f = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f = +\infty$. También es posible justificar esta parte al final.
- ∘ Ceros: $f(x) = 0$ en $x = 1$, adems si $x = 0$, $y = -1$ luego la intersección con el eje OY es $(0, -1)$.

(b)

- ∘ f es continua en su dominio por ser cuociente de polinomios continuos. y no es reparable en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty$
- ∘ Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas:
  - ⋄ Verticales: f posee una asíntota vertical en $x = -1$
  - ⋄ Horizontales: no tiene pues $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

◇ Oblicuas: $y = mx + n$ con:

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1 \\
n &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \\
&= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-5x^2+2x+1}{x^2+2x+1} = -5
\end{aligned}
$$

Asíntota oblicua de ecuación $y = x - 5$

(c) Crecimiento: Cálculo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \text{ en } x = 1 \text{ y en } x = -5 \\
f'(x) &> 0 \text{ ssi } x \in (-\infty,-5) \cup (-1,1) \cup (1,\infty) \text{ es creciente} \\
f'(x) &< 0 \text{ ssi } x \in (-5,-1) \text{ es decreciente}
\end{aligned}
$$

f posee un máximo local en $x = -5$ (pues $f(x) \to \pm\infty$ si $x \to \pm\infty$) y en $x = -1$ no es diferenciable, con $\lim_{x\to -1^{\pm}} = -\infty$

(d) Concavidad e inflexiones: Cálculo de $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \text{ si } x = 1 \text{ punto de inflexión} \\
f''(x) &< 0 \text{ si } x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \text{ concava} \\
f''(x) &> 0 \text{ si } x > 1 \text{ convexa}
\end{aligned}
$$

- Gráfico

	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$	$-$	$-27/2$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\overset{>0}{\nearrow}$	0	$\overset{<0}{\searrow}$	$\nexists$	$\overset{>0}{\nearrow}$	0	$\overset{>0}{\nearrow}$
$f''(x)$	$\overset{<0}{\text{Concava}}$		$\overset{<0}{\text{Concava}}$	$\nexists$	$\overset{<0}{\text{Concava}}$	0	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$

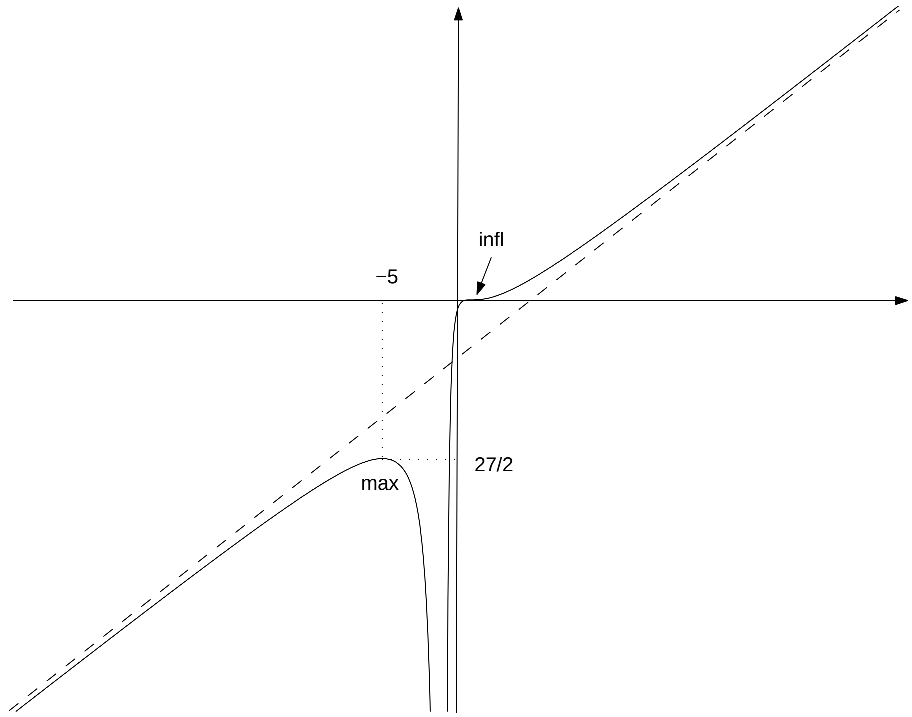


Figura 1: $f(0) = -1$ (intersección con el eje Y)

Asignación de puntajes P2

(a)	(0.5 ptos)
(0.15)	Dominio.
(0.15)	Ceros.
(0.2)	Recorrido.
(b)	(1 ptos)
(0.3)	Justificación de continuidad.
	Determinar asíntotas:
(0.1)	Vertical.
(0.6)	Oblicua.
(c)	(2 ptos)
(0.8)	Cálculo de f' y factorización adecuada.
(0.4)	Raices de $f'(x) = 0$ y diferenciabilidad de f.
(0.8)	Estudio del crecimiento y conclusión del máximo local en $x = -5$.
(d)	(2 ptos)
(1.0)	Cálculo de f''. factorización adecuada y raices de $f''(x) = 0$.
(1.0)	Estudio de las concavidades convexidades e inflexiones.
(e)	(0.5 ptos)
(0.2)	Tabla de valores.
(0.3)	Gráfico aproximado.

P3.- Considere la función $f_n\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f_n(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

(a) (1.5 ptos.) Demuestre que $f_n(x)$ es estríctamente creciente en $[0,\infty)$ y deduzca que la ecuación $f_n(x) = 1$ posee una única solución positiva, para cada $n \in \mathbb{N}^*$, que denotaremos x_n.

(b) (1.5 ptos.) Demuestre que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, definida en la parte anterior, satisface la propiedad $x_{n+1} \in [0, x_n]$ y concluya que existe $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(c) (1.5 ptos.) Encuentre el radio e intervalo de convergencia de la serie $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ y obtenga una expresión analítica para $S(x)$.

(d) (1.5 ptos.) Establezca la desigualdad $f_n(\bar{x}) \le f_n(x_n) \le S(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, utilícela para deducir que $S(\bar{x}) = 1$ y calcule $\bar{x}$.

Pauta.- **(a)** Es inmediato que $f_n^1(x) = 1 + x +^2 + \cdots + x^{n-1} \quad \forall x \in [0,\infty)$
de donde $f^1(x) \ge 1 > 0 \quad \forall x \in [0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Entonces $f_n(x)$ es estrictamente creciente en $[0,\infty)$
Además $f_n(x)$ es función polinómica y por lo tanto continua en $[0,\infty)$ con $f_n(0) = 0$ y $f_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = q \ge 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$
En virtud del Teorema del valor intermedio (TVI). $\forall d \in [0,q] \exists x \in [0,1]$ tal que $f_n(x) = d$.
En particular, en este caso, como $1 \in [0,q], \exists x_n \in [0,1]$ tal que $f_n(x_n) = 1$
Adicionalmente, como $f_n(v) = 0$, $f_n(x)$ es creciente estricta y continua en $[0,\infty)$, entonces $f_n(x)$ es biyectiva en $[0,\infty)$
Se concluye que $x_n \in [0,1]$ es única.

(b) <u>**Primera forma**</u>
Sabemos que $f_n(0) = 0, f_n(x_n) = 1$ y $f_{n+1}(x_{n+1}) = 1 \forall n \in \mathbb{N}^*$
Consideremos $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1} + \frac{x_{n+1}}{2} + \cdots + \frac{x_{n+1}^n}{n} + \bigg(\underbrace{\frac{(x_{n+1})^{n+1}}{n+1} - \frac{(x_{n+1})^{n+1}}{n+1}}_{0}\bigg)$

y reagrupando $f_n(x_{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) - \frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1} = 1 - \underbrace{\frac{x_{n+1}^{n+1}}{n+1}}_{\ge 0} \le 1 = f_n(x_n)$

Entonces $0 = f_n(0) \le f_n(x_{n+1}) \le f_n(x_n) = 1$, es decir, $f_n(x_{n+1}) \in [f_n(0), f_n(x_n)]$ y en virtud del TVI. $f_{n+1} \in [0, x_n]$, o bien $0 \le x_{n+1} \le x_n$ con lo cual, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente por 0.
Se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es convergente y existe $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$

<u>**Segunda forma**</u>
Sabemos que $f_n(x_n) = f_{n+1}(x_{n+1}) = 1$
Considerando $f_{n+1}(x_n) = \left(x_n + \frac{x_n}{2} + \cdots + \frac{x_n^n}{n}\right) + \frac{x^{n+1}}{n+1} = 1 + \frac{x_n^{n+1}}{n+1} = f_{n+1}(x_{n+1}) + \frac{x_n^{n+1}}{n+1}$
Es decir $f_{n+1}(x_n) \ge f_{n+1}(x_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}^*$

Como f_{n+1} es biyectiva, $\exists f_{n+1}^{-1}$ también biyectiva y creciente estrica.
En consecuencia $f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(x_n)\right) \geq f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}(x_{n+1})\right) \Rightarrow x_n \geq x_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}^*$
Se concluye que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es creciente y acotada, luego convergente
y $\exists \bar{x} = \lim x_n,\ \bar{x} \in [0,1]$.

(c) Se puede utilizar el test del cuociente $\left(R = 1/\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$. Entonces $R = 1$ convergencia de la serie en los extremos del intervalo

- $x = 1$ queda $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$ que diverge (serie armónica)
- $x = -1$ queda $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ que converge por criterio de Leibnitz (términos alternantes con $\frac{1}{n}\xrightarrow{\text{decrece}} 0$)

Luego el intervalo de convergencia es $[-1,1)$. En virtud de la convergencia uniforme de $\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ en su intervalo de convergencia, podemos derivar término a término, es decir $S^1(x) = \sum\limits_{1}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k}\right)^1 = \sum\limits_{1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{k} = \sum\limits_{1}^{\infty}x^{k-1} = \sum\limits_{0}^{\infty}x^k$ pero $\sum\limits_{0}^{\infty}x^k = \frac{1}{1-x}$ en (-1,1), es decir $S^1(x) = \frac{1}{1-x}$. Integrando en $[0,x], x<1$ queda $\int_0^x S^1(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t}$
es decir $S(x) - S(0) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ y como $S(0) = \sum\limits_{1}^{\infty}\frac{o^k}{k} = 0$.
Se concluye $\boxed{S(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)}$

(d) En efecto $f_n(x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_n^k}{k} \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x_n^k}{k} = S(x_n) \Rightarrow f_n(x_n) \leq S(x_n)$
También $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \bar{x} \leq x_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ puesto que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ es sucesión decreciente y como f_n es creciente estricta, $f_n(\bar{x}) \leq f_n(x_n)$. Se ha demostrado que $f_n(\bar{x}) \leq f_n(x_n) \leq S(x_n) \Leftrightarrow f_n(\bar{x}) \leq 1 \leq S(x_n)$ observando que $f_n(x_n) = 1$. Adicionalmente se sabe que $f_n(\bar{x})\xrightarrow{\text{c.u}}S(\bar{x}) \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\bar{x}) = S(\bar{x})$
También $\lim\limits_{n\to\infty} S(x_n) = S(\lim\limits_{n\to\infty}(x_n))$ por la continuidad de S. Entonces $\lim S(x_n) = S(\bar{x})$
En consecuencia, la desigualdad $f_n(\bar{x}) \leq 1 \leq S(x_n)$ se transforma cuando $n \to \infty$ en $S(\bar{x}) \leq 1 \leq S(\bar{x})$, es decir $S(\bar{x}) = 1$
Finalmente $S(\bar{x}) = 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1-\bar{x}}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{1-\bar{x}} = e$ entonces $\bar{x} = 1 - \frac{1}{e}$

Asignación de puntajes P3

(a)	(1.5 ptos)
(0.5)	Argumentación por crecimiento estricto de $f_n(x)$.
(0.5)	Argumentación de continuidad a plicación de TVI para existencia de $x_n \in [0,1]$.
(0.5)	Argumento para unicidad de x_n.
(b)	(1.5 ptos)
(0.8)	Construcción de la desigualdad $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n)$ (Primera forma) ó $f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_{n+1}(x_n)$ (Segunda forma).
(0.7)	Argumentación aplicando TVI y existencia $\bar{x} = \lim\limits_{n \to infty} x_n$ (Primera forma) ó Argumentación aplicando biyectividad y $\bar{x} = \lim\limits_{n \to infty} x_n$ (Segunda forma).
(c)	(1.5 ptos)
(0.3)	Radio e intervalo de convergencia incluyendo extremos.
(0.4)	Derivada de la serie y ajustes.
(0.4)	Reconocimiento de $\sum_0^\infty x^k = \frac{1}{1-x}$ en $(-1,1)$.
(0.4)	Integración y cálculo de $S(x)$.
(d)	(1.5 ptos)
(0.6)	Demostración de la desigualdad (0.3 ptos cada parte).
(0.6)	Cálculo y argumentación de los límites (0.3 ptos cada uno).
(0.3)	Conclusión de $S(\bar{x}) = 1$ y cálculo de $\bar{x}$