UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-03 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 4 / 4 / 2001 TIEMPO : 2,5 HORAS

CONTROL #1

1.- Sean $A, B \subset R^n$ con $A \neq \phi$, $B \neq \phi$

Se define la distancia entre *A* y *B* como

$$d(A,B) = \inf\left\{ \quad \| x - y \| \,/\, x \in A, y \in B \right\}$$

i) ¿Es *d(A,B)* una métrica en $\mathrm{P}(R^n)$? Justifique.
ii) Demuestre que

$$A_1 \subset A_2 \qquad B_1 \subset B_2 \Rightarrow \qquad d(A_2, B_2) \leq d(A_1, B_1)$$

iii) En el caso particular en que $A = \{x\}$ se define $d(x,B) = \inf\left\{ \quad \| x - y \| \,/\, y \in B \right\}$
Muestre que:

a) Si $x \in B \Rightarrow d(x,B) = 0$
b) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow d(x, A_2) \leq d(x, A_1)$

iv) Sea $A \subset R^n$, demuestre que

$$d(x, \overline{A}) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$$

v) Si *F* es cerrado, muestre que

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

vi) Sean $A, B \subset R^n$, muestre que

$$d(A,B) = d(\overline{A}, \overline{B})$$

vii) Sea $F \subset R^n$, muestre que

$$d(x,F) = d(x, \overline{F})$$

2.- Sea $f : R^2 \to R$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} Ln(x^2 + y^2) & Si \quad x^2 + y^2 > 1 \\ Ln\left(\dfrac{1 + x^2 + y^2}{3 - x^2 - y^2}\right) & Si \quad x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

a) Determine el dominio y recorrido de la función.
b) Determine y grafique las curvas de nivel.
c) Grafique la función en 3-D.

3.- Para las siguientes funciones de $R^2 \to R$, estudiar los límites en el origen.

a) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|^{\alpha}}{x^2 - xy + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar en función de α.

b) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y(x^2+y^2)^{3/2}}{(x^2+y^2)^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ Puede ser útil que $(x^2 + y^2 - y)^2 \geq 0$

c) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & Si \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & en..otro..caso \end{cases}$$

d) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2 (x^2 - y)^2}{x^7 \sqrt{x}} & Si \cdot x > 0 \wedge 0 < y < x^2 \\ 0 & en..otro..caso \end{cases}$$