UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

CURSO : MA22A-03 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 6 / 6 / 2001 TIEMPO: 3 horas

# CONTROL #3

1.-
a) Una empresa minera posee $m$ yacimientos. El mineral extraído de cada uno de ellos tiene $n$ posibles puertos de embarque.
Se sabe que el costo de transportar una tonelada desde el yacimiento $i(1 \leq i \leq m)$ al puerto $j(1 \leq j \leq n)$ es $c_{i,j}$.
El yacimiento $i$ produce mensualmente a lo más $s_i$ toneladas. Esta empresa debe embarcar mensualmente por el puerto $j$ la cantidad de a lo menos $F_j$ toneladas. Todo lo producido se embarca.
Formule el problema de optimización que permita calcular las cantidades de minerales a transportar desde cada yacimiento a los distintos puertos de tal manera de minimizar el costo de transporte en el mes.

b) Resuelva gráficamente el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 2x_1 - x_1^2 + x_2 \\ & \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

2.- a) Encuentre la mínima distancia en $\mathrm{R}^2$ entre las dos figuras de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 = 1 \qquad\qquad x + y = 4$$

Ilustre gráficamente y compruebe sus resultados.

b) Sea $f : \Omega \subseteq R^2 \to R^2$ una función de clase $C^2(\Omega)$, definida por:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}$$

Sean además los conjuntos:

$A = \{(x,y) \in \Omega / u(x,y) = c_1\}$ (curva de nivel de $u$ ).
$B = \{(x,y) \in \Omega / v(x,y) = c_2\}$ (curva de nivel de v).

Probar que si $(x_0, y_0) \in A \cap B$ es tal que $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, y si además:

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ sobre $\Omega$., entonces las curvas de nivel de $u$ y v son ortogonales en $(x_0, y_o)$.

3.- Sea $f : R^2 \to R$ de clase $C^2(R^2)$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Nos proponemos determinar todas las soluciones de la ecuación (1), mediante el procedimiento siguiente:

a) Sea $\phi : R^2 \to R^2$ un cambio de variable definido por $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u = x + vt \\ w = x - vt \end{pmatrix}$

Muestre que la función $g : R^2 \to R$ definida por $g(u,w) = (f \circ \phi^{-1})(u,w)$ está bien definida y que es de clase $C^2(R^2)$. (1 punto)

b) Usando el hecho que $f(x,t) = (g \circ \phi)(x,t)$ demuestre que la ecuación (1) se transforma en:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial w}(u,w) = 0 \quad (2) \qquad \forall (u,w) \in R^2$$

(2,5 puntos)

c) Determine la solución general de la ecuación (2) y deduzca una expresión general para $f(x,t)$ (solución de la ecuación 1 ). Encuentre una solución particular para $f$ que no sea la función nula, ni un polinomio. (2,5 puntos)