UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MAT.

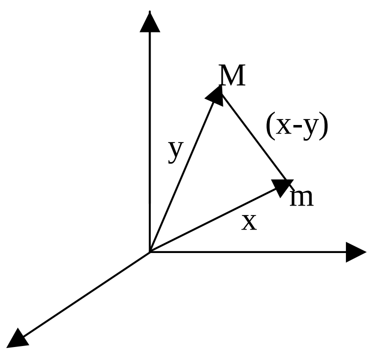
CURSO : MA22A-03 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 6 / 7 / 2001 TIEMPO: 3 horas

EXAMEN

1.- Una de las primeras y quizás más ampliamente conocida de las leyes de Newton es la famosa Ley de Gravitación Universal.

La ley dice que si tenemos 2 partículas, una de masa m en x y otra de masa M en y, la fuerza que actúa sobre la partícula en x es:

$$F = -\gamma \frac{mM}{\| x - y \|_2^3}(x-y) \qquad \text{con } \gamma : \text{Constante de Gravitación Universal}$$



Si $x(t)$ es la posición en el espacio de una partícula de masa m que se mueve bajo la acción de la fuerza gravitatoria, debida a una masa M fija en el origen .

Pruebe que la Energía

$$E(t) = \frac{m}{2}\| x'(t) \|^2 - \gamma \frac{mM}{\| x(t) \|}$$

es conservada, es decir, $E'(t) = 0$

Indicación: - Use la segunda Ley de Newton $F = mx''$

- $\| x \|_2 = \sqrt{< x, x >}$

2.- RESPONDA UNO DE LOS 2 PROBLEMAS SIGUIENTES

a) Considere una empresa que tiene por insumos capital *(K)* y trabajo *(L)*. Suponga que la empresa tiene una función de producción $Q = f(K , L)$ y que el precio de la unidad de trabajo y capital es w y r respectivamente.

i) Formule el problema de minimizar el costo de producción y encuentre la expresión general que lo resuelve.

ii) Resuelva este problema para el caso en que:

$$Q = f(K, L) = 2K^{1/2}L^{1/2} \qquad r = 2 \qquad w = 8 \quad \text{y se desea producir 8 unidades.}$$

b) Encuentre los valores de x e y que maximizan la función $f(x, y) = x^2 - y$ sujeto a la restricción $x^2 + y^2 \leq 16$

3.-
a) Calcular la masa del sólido descrito por $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 \quad x \geq 0 \quad y \geq 0 \quad z \geq 0$, cuya densidad está dada por $\rho(x, y, z) = xyz \quad [Kg / m^3]$.

Recuerde que: $M = \int \rho dV$

b)

i) Calcule $$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^{x+z} dydzdx$$

ii) Obtenga la expresión de la integral anterior con los diferenciales en el orden *dydxdz.*

4.- Encuentre el volumen encerrado por los paraboloides

$$z = x^2 + y^2$$

$$z = 8 - (x^2 + y^2)$$

Indicación : Use coordenadas adecuadas.