MA 22A Cálculo en Varias Variables

Profesor: Patricio Felmer
Auxiliares: G. Espinoza
R. Menares
A. Prat

1. Encuentre el interior y la adherencia de los siguientes subconjuntos de $I\!R^2$:

   a) $\{(x_1, x_2) : x_2 > x_1\}$
   b) $\{(x_1, x_2) : 0 < \|(x_1, x_2)\| \leq 1\}$
   c) $\{(x_1, x_2) : x_1 = x_2 \text{ y } x_1 > 0\}$
   d) $\{(x_1, x_2) : x_1 \in Q\}$
   e) $\{(\frac{1}{K}, (-1)^K) : K \in I\!N \setminus \{0\}\}$

2. Se define la "distancia" de un punto $\vec{x} \in I\!R^n$ a un conjunto $A \subseteq I\!R^n$ como

$$d_A(\vec{x}) = \inf_{\vec{y} \in A} \{\|\vec{y} - \vec{x}\|\}$$

   Probar que $\bar{A} = \{\vec{x} \in I\!R^n : d_A(\vec{x}) = 0\}$.

3. Sea $f : I\!R^n \to I\!R$ una función continua no acotada, es decir,

$$\forall L \in I\!R, \exists M \in I\!R_+ \text{ tal que } \|\vec{x}\| \geq M \Rightarrow f(\vec{x}) \geq L.$$

   Para $\lambda \in I\!R$ se define $S_\lambda = \{\vec{x} \in I\!R^n : f(\vec{x}) \leq \lambda\}$
   Pruebe que:
   a) S_λ es cerrado
   b) S_λ es acotado (es decir, $\exists C \in I\!R_+$ tal que $\|\vec{x}\| \leq C, \forall \vec{x} \in S_\lambda$).

4. Sea $L : I\!R^n \to I\!R^m$ una función lineal. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
   i) L es continua
   ii) $\exists C > 0 : \|L(\vec{x})\| \leq C\|\vec{x}\|, \forall \vec{x} \in I\!R^n$.
   iii) $\exists M > 0 : \|\vec{x}\| \leq 1 \Rightarrow \|L(\vec{x})\| \leq M$.

5. Sea f definida por la siguiente fórmula:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \text{ si } (x_1, x_2) \neq 0 \text{ y } f(0, 0) = 0$$

   a) Encuentre el conjunto donde se puede definir f, es decir $Domf$, grafique.

b) Determine las curvas de nivel de f.
c) Determine si f es continua en $(0,0)$.

6. Determine si las siguientes funciones admiten límite en los puntos que se indican:
   a) $f(x,y) = 2xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
   b) $f(x,y) = \frac{senx-seny}{x-y}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.
   c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ en $\vec{x}_0 = (0,0)$.

7. Encontrar todas las derivadas parciales para

$$f(x,y) = (e^x cosy, e^x seny)$$
$$f(x,y) = log_x y.$$

8. Sea $f : I\!R^2 \rightarrow I\!R$ continua y diferenciable. Sea $G_f = \{(\vec{x}, f(\vec{x}))/\vec{x} \in Dom f\}$ el gráfico de f. Sea $F : I\!R^3 \rightarrow I\!R$ tal que $F(x,y,z) = z - f(x,y)$.
   a) Muestre que G_f corresponde a un conjunto de nivel de F.
   b) Demuestre que $\nabla F = (-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1)$.
   c) Encuentre el vector normal y el plano tangente a G_f cuando $f(x,y) = xy + ye^x$ en el punto (1.1).

9. Sea $f : I\!R^2 \rightarrow I\!R$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \|(x,y)\|^2 sen(\frac{1}{\|(x,y)\|}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcular $\nabla f(0,0)$.
   b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.
   c) Probar que $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ no son continuos en $(0,0)$.

10. Hallar la ecuación para el plano tangente a cada superficie $z = f(x,y)$ en el punto indicado.
   a) $z = x^3 + y^3 - 6xy, \quad (1,2,-3)$.
   b) $z = (cosx)(seny), \quad (0, \pi/2, 1)$.