CONTROL 1
CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES MA22A

JAIME H. ORTEGA

Problema 1: Sean $A, B \subset X$, dos conjuntos no vacíos.

(1) Pruebe que $Fr\ (A \cup B) \subset Fr\ A \cup Fr\ B$. Encuentre un contraejemplo de lo anterior, es decir, construya dos conjuntos A y B tales que
$$Fr\ (A \cup B) \neq Fr\ A \cup Fr\ B.$$
(2) Supongamos que A es cerrado, entonces pruebe que $Fr\ A \subset A$.

(3) Sean A y B dos conjuntos cerrados, tales que $A \cap B = \emptyset$, entonces
$$Fr\ (A \cup B) = Fr\ A \cup FrB.$$

Problema 2: Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, una función diferenciable tal que
$$f(0, 4, -1) = 25$$
y además
$$f_x(0, 4, -1) = 1, \quad f_y(0, 4, -1) = 2, \quad f_z(0, 4, -1) = -1.$$
(1) Calcule la derivada direccional de f en el punto $(0, 4, -1)$ en la dirección del vector $(1, -3, 4)$.

(2) Calcule la derivada direccional máxima y diga en que dirección se encuentra.

(3) Encuentre la derivada direccional de f en el punto $(0, 4, -1)$ en la dirección normal exterior a la superficie
$$4x^2 + y^2 + 9z^2 = 25.$$
(4) Encuentre el plano tangente a la superficie $f(x, y, z) = 25$ en el punto $(0, 4, -1)$.

Problema 3: Sea $\alpha > 0$ y considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^\alpha}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0. \end{cases} \tag{0.1}$$
(1) Determine para que valores de α la función f es continua en $(0, 0)$.

(2) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$ para los diferentes valores de α.

(3) Determine para que valores de α la función f es diferenciable en $(0, 0)$.

Problema 4: Se dice que una función $f(x, y)$ es armónica si verifica que
$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 armónica y sean
$$x = e^u \cos v \quad y = e^u \sin v.$$
Consideremos la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como
$$g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)).$$
(1) Pruebe que
$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = e^{2u} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right].$$
(2) Pruebe que g es armónica, es decir
$$\triangle g = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$