Control 1 MA22A Cálculo en Varias Variables

Semestre 2005-1

6 de abril de 2005

Profesor: P. Guiraud — Auxiliar : R. Aliaga

Problema 1. a) (3 pts) Sean A, B y C los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2<1,\ y>0\} \\ B &= \{(x,y) \text{ tq } y=x-4,\ x\in\mathbb{N},\ 4\leq x\leq 8\} \end{aligned}$$

i) Probar que A es abierto y que $\{(x,y) \text{ tq } x^2+y^2=1,\ y>0\}\cup\{(x,0),\ -1\leq x\leq 1\}$ es su frontera.

ii) Determine el interior, adherencia, frontera y el conjunto de los puntos de acumulación de B.

b) (3 pts) Sea $(M_{n\times m}(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ el espacio vectorial de las matrices con valores reales dotado de la norma

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} |a_{ij}| \qquad A\in M_{n\times m}(\mathbb{R}).$$

Mostrar que $(M_{n\times m}(\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Indicación: Usar el hecho que $(R,|\cdot|)$ es un espacio de Banach.

Problema 2. Sea E el espacio vectorial de los polinomios de una variable real con coeficientes reales. Definamos para todo $p\in E$ la función $||\cdot||: E\to\mathbb{R}$ por:

$$||p|| = \max_{x\in[0,1]} |p(x)|.$$

a) (2 pts) Demuestre que $||\cdot||$ es una norma en el espacio E.

Indicación: Se recuerda que un polinomio tiene tantos ceros como el grado, excepto si es el polinomio nulo.

b) (1 pt) Demuestre que si $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E convergente a un polinomio p entonces

$$\lim_{k\to+\infty} p_k(x) = p(x) \qquad \forall\, x\in[0,1].$$

c) (3 pts) Considere la sucesión $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ en E definida por $p_k(x)=x^k$ y demuestre que

i) $||p_k||=1$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

ii) $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no tiene punto de acumulación.

Problema 3. a) (2 pts) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

Indicación: Usar la definición del límite (*épsilon-delta*) para probar la continuidad en $(0,0)$.

b) (2 pts) Encontrar $a\in\mathbb{R}$ para que

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y\ln|x|}{x-1} & \text{si} \quad x\neq 1 \\ a & \text{si} \quad x=1 \end{cases}$$

sea continua en $\mathbb{R}^2$.

c) (2 pts) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{x+y}, \frac{e^x - 1}{x}, \frac{y \ln(|\operatorname{sen} y| + 1)}{\operatorname{sen} x} \right)$$

i) Encontrar el conjunto A donde f es definida. Dibujar la frontera de A. Justificar graficamente que $(0,0)$ es punto de acumulación de A.

ii) Es la funcion g definida por la formula:

$$g(x,y) = f(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y) \in A \quad \text{y} \quad g(x,y) = (0,0,0) \quad \text{si} \quad (x,y) = (0,0)$$

continua en $(0,0)$? Justificarlo.

TIEMPO: 3 HORAS.