MA22A-01 : Cálculo en Varias Variables
Control 1

Prof: Francisco Ortega
Aux: Alejandro Omon

03 Enero 1997

Pregunta 1. Sea d una distancia en $\mathbb{R}^n$ y sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ dos conjuntos no vacios, demuestre:

(a)

$$\begin{array}{rll} C = & \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,A) = d(x,B)\} & \text{es cerrado} \\ D = & \{x \in \mathbb{R}^n / d(x,A) < d(x,B)\} & \text{es abierto} \end{array}$$

donde $d(x,A) = \inf\{d(x,y)/y \in A\}$.

(b) Si A y B son cerrados y disjuntos, existen 2 abiertos no vacios U y V tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$

Pregunta 2. Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por:

$$f(x,y) = \left(\frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} \right)$$

(a) Determine el dominio de f y de las funciones componentes. Grafique.

(b) Clasifique los conjuntos determinados en la parte **(a)** y encuentre su interior, adherencia y frontera (trabaje geométricamente)

(c) Calule (si es que existe) para $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

(d) Estudie la continuidad de f.

Pregunta 3. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal.

(a) Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

(1) L es continua para todo punto de $\mathbb{R}^n$.

(2) L es continua en 0.

(3) $\|L(x)\|$ es acotada sobre la bola unitaria, $\bar{B}(0,1)$.

(b) Demuestre que toda función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es continua.

Tiempo : 3:00 Hrs.