Departamento de Ingeniería Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
UNIVERSIDAD DE CHILE

CONTROL 1 MA22A 2004

Prof. Alejandro Jofré Aux. Lilian Rocha

Tiempo: 3.5 horas.

1. (a) Sean A, B subconjuntos de un espacio vectorial normado E.

(i) Pruebe que $\operatorname{adh}(A \cap B) \subseteq \operatorname{adh}(A) \cap \operatorname{adh}(B)$. De un ejemplo donde haya igualdad y otro en que la inclusión sea estricta.

(ii) Suponga que A es cerrado y B es compacto. Muestre, usando la noción de sucesiones, que el conjunto $A+B = \{x \in E \mid x = a+b \text{ con } a \in A,\ b \in B\}$ es cerrado.

(b) Sea $A = [0,1]$ y considere el espacio vectorial E de las funciones $f\colon A \to \mathbb{R}$ tales que f, f' son continuas y acotadas. Consideremos la función $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

(i) Muestre que $\|\cdot\|$ es norma en E.

(ii) Verifique que $\|\cdot\|$ no es equivalente a $\|\cdot\|_\infty$ en E. Para ello considere la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida mediante $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

2. Considere la sucesión de funciones $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x \le -1/n, \\ n(x+1/n) & -1/n \le x \le 0, \\ -n(x-1/n) & 0 \le x \le 1/n, \\ 0 & 1/n \le x \le 1. \end{cases} \tag{1}$$

(a) Para n fijo, dibuje la función f_n. Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas. Pruebe que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(C([0,1], \|\cdot\|_1))$, donde

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx.$$

(b) Muestre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es convergente en $(C([-1,1]), \|\cdot\|_1)$.

(c) Pruebe que $\|f_n\|_\infty = 1$ y que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene a una función discontinua como límite puntual. Deduzca que $(C([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$ no es compacto

3. (a) Estudie la continuidad de la funcion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{e^{x+y} - 1 + \sin(x^2 - y^2)}{x+y}.$$

(b) Considere $C \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1,\ x^2 + 2y^4 \leq 4\}$$

Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. Pruebe que $f(C) \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto compacto.

(c) Considere el conjunto

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1/16\}.$$

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere el siguiente problema de minimización

$$\min\{f(x, y) \mid f(x, y) \in f(D^c)\},$$

donde D^c es el complemento de D. Muestre que este problema admite una solución, es decir, existe $(\bar{x}, \bar{y}) \notin f(C)$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, y)$ para todo $(x, y) \notin f(C)$.