UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS

CONTROL 1

MA22A Cálculo en Varias Variables
28 de Agosto de 2002

Tiempo: 2 horas 45 minutos Profesor: Cristian Pérez

1. *a*) Considere el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ dado por $A = \{(x,y) : 0 < y < x \wedge x > 0\}$. Determine para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)y}{x^\alpha} & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in A^c, \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Considere los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ dados por $A = \{(x,y) : x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$ y $B = \{(0,0)\} \cup \{(1/n\pi, 0) : n \in \mathbb{Z}^*\} \cup \{(0, 1/n\pi) : n \in \mathbb{Z}^*\}$, donde $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Demuestre que la función $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\,\mathrm{sen}(1/x)\,\mathrm{sen}(1/y) & \text{si } (x,y) \in A, \\ 0 & \text{si } (x,y) \in B, \end{cases}$$

es continua en $A \cup B$.

c) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{1-(x^2+y^2)}}$. Encuentre el dominio A de f y estudie la posibilidad de prolongar por continuidad f a la adherencia de A. En caso de existir, defina la función continua resultante.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sen}(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ y & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

b) Encuentre las derivadas parciales de f y estudie su continuidad en $\mathbb{R}^2$.

c) Estudie la diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

d) Encuentre la matriz jacobiana de f en $(\pi, 1)$ y calcule la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(\pi, 1, 0)$.

3. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \{(x,y) : x \in \mathbb{R}^n \wedge y \in \mathbb{R}^m\}$ provisto de la norma $\|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$. Sea $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ una función bilineal, es decir, existe una función lineal $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que

$$B(x,y) = \langle L(x), y \rangle \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

a) Demuestre que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|B(x,y)| \leq C\|x\|\|y\| \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

b) Demuestre que para todo $(x,y), (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ se tiene

$$B\big((x,y) + (h,k)\big) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k).$$

c) Demuestre que B es continua en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Indicación: $B(x,y) = B(x - x_0 + x_0, y - y_0 + y_0)$.

d) Demuestre que B es diferenciable en cada punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ con

$$DB(x_0,y_0)(h,k) = B(h,y_0) + B(x_0,k) \quad \forall\, (h,k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$