Control 1 MA22A Cálculo en Varias Variables
Semestre 2005-1

29 de Marzo de 2006

Profesor: P. Guiraud Auxiliares : R. Cortez y R. Diaz

Pregunta 1.

1. Sea $A = \left\{ (x,y) \,/\, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\, y > \tan(x) \right\}$. Determine $int(A)$, $adh(A)$, $der(A)$, $Fr(A)$ y exprese estos conjuntos analíticamente. ¿Es A abierto, cerrado, compacto?
2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \subseteq B$ entonces $adh(A) \subseteq adh(B)$.
3. Para $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ se define $A + B = \{x + y \,/\, x \in A,\, y \in B\}$. Pruebe que si A es abierto entonces $A + B$ es abierto.

Pregunta 2.

1. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $g : C \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = f(x) + x$ donde $f : C \to \mathbb{R}^n$ satisface:
$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in C$$
donde $K < 1$ es una constante.
   a) Muestre que para toda sucesion $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de C se tiene:
$$\|x_p - x_q\| \leq \frac{1}{1-K}\|g(x_p) - g(x_q)\| \quad \text{para todo} \quad p, q \in \mathbb{N}$$
   Ind.: usar la desigualdad triangular.
   b) Suponiendo que $\{g(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge muestre que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in C$.
   c) Sabiendo que f es continua mostrar que la imagen de g es cerrada.
2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \begin{cases} x + y & \text{si } x + y \leq 0 \\ \sqrt{x+y} + xy & \text{si } x + y > 0. \end{cases}$$
Determine los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua. Justifique su respuesta.

Pregunta 3.

1. Considere las funciones : $f(x,y) = y - x^2$ y $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   a) Dibuje los conjuntos de niveles de f y de g.
   b) Dibujar el grafo de g.
2. Sea
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ a & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$
Encuentre a de modo que f sea continua en $\mathbb{R}^2$ (Pruebelo).
3. Considere la función
$$f(x,y) = \left(\frac{x^2 y}{sen(x)}, \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{y - x^2 + 1}}, \frac{sen(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right)$$
   a) Sea D el dominio de f. Encuentre y dibuje D.
   b) Calcule el límite (si existe) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ para todo (a,b) del conjunto $der(D)$.