Control 1 MA22A Cálculo en Varias Variables

Semestre 2005-2

7 de Septiembre de 2005

Profesor: P. Guiraud

Problema 1. a) (2 pts) Dibujar el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x + y < 2,\ x > -1,\ y \geq 0\} \cup \{(2, -1)\}$ y encontrar gráficamente $Int(A)$, $Der(A)$, $Adh(A)$ y $Fr(A)$.

b) (2 pts) Probar que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 < 1,\ y > 0\}$ es abierto.

<u>Indicación:</u> Probar primero que $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 < 1\}$ y $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } y > 0\}$ son abiertos.

c) (2 pts) Se considera un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$. Mostrar que:

i) Si A es cerrado y acotado entonces A es compacto.

ii) Si A es compacto entonces A es cerrado y acotado.

Problema 2. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado y $f : K \to K$ una función para la cual existe una constante $c \in]0, 1[$ tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\| \quad \text{para todo} \quad x, y \in K.$$

a) (2 pts) Mostrar que f es uniformemente continua. Probar que si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $\bar{x} \in K$ entonces $\{f(x_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a $f(\bar{x})$.

b) (2 pts) Sea $x_0 \in K$ cualquiera y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por la recurrencia $x_{k+1} = f(x_k)$.

i) Mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\|x_{k+1} - x_k\| \leq c^k\|x_1 - x_0\|$ y deducir que

$$\|x_k - x_l\| \leq \sum_{i=l}^{k-1} c^i\|x_1 - x_0\| \quad \text{para todo} \quad k > l.$$

ii) Probar que $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $\bar{x} \in K$. (Se le recuerda la igualdad $\sum\limits_{i=l}^{+\infty} c^i = \frac{c^l}{1-c}$).

c) (2 pts) Mostrar que $f(\bar{x}) = \bar{x}$ y que $\bar{x}$ es el único punto que satisface esta igualdad.

Problema 3. a) (3 pts) Sean $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tq } 4 < x^2 + y^2 \leq 9\}$. Se considera la función f definida en $D_1 \cup D_2$ por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - r & \text{si} \quad (x, y) \in D_1 \\ \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) \in D_2 \end{cases} \qquad \text{con } r \in \mathbb{R}.$$

i) Dibujar los conjuntos de nivel $0, -1, -r$ de f y $Grafo(f)$ para $r = 4$. Dibujar los conjuntos de nivel $0, 1, -r$ de f y $Grafo(f)$ para $r = 3$.

ii) Dibujar D_1, D_2 y $D = Der(D_1) \cap Der(D_2)$ y estudiar la continuidad de f_r para todos los valores de r.

iii) ¿Por cual(es) valor(es) de r la función f es uniformemente continua en $D_1 \cup D_2$?

b) (3 pts) Se define $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por:

$$f(x, y) = \left(\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y}},\ \frac{xy^3}{(x + 1)^2 + y^2},\ \frac{\operatorname{sen}((x - 1)^2 + y^2)}{(x - 1)^2 + y^2} \right).$$

Dibujar $Dom(f)$ y calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ para todo punto (x_0, y_0) en $Der(Dom(f)) \setminus \{(1, -1)\}$.

TIEMPO: 3 HORAS.