CONTROL 2
CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES MA22A
7 DE MAYO, 2003

JAIME H. ORTEGA

Problema 1:

(1) Hallar todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = \text{sen}x + y^2 + 2y\cos x + 1,$$

y utilizando el criterio de la segunda derivada clasifíquelos si es posible.

(1 pto.)

(2) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en todo su dominio y sea (x_0, y_0) un punto de extremo local de f, es decir, (x_0, y_0) es un máximo o un mínimo local de f. Supongamos que f es armómica, es decir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

(1 pto.)

Entonces, pruebe que todas las derivadas parciales segundas de f se anulan en (x_0, y_0).

(3) Encontrar el punto de la parábola $2x^2 - 4xy + 2y^2 - x + y = 0$ más próximo a la recta $u + v = 1$. Encuentre la distancia entre la parábola y la recta. Recuerde que dados dos conjuntos A, B arbitrarios no vacíos, se define la distancia entre A y B como

$$dist(A,B) = \min_{a\in A, b\in B} dist(a,b).$$

(1 pto.)

Problema 2:

Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x,y) = (e^x \cos(xy), e^x \text{sen}(xy)).$$

Muestre que f es localmente invertible en el punto $(1, \pi)$. Encuentre además la aproximación afín de f^{-1} en un entorno de $(-e, 0)$.

(1,5 ptos.)

Problema 3:

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y\cos(uv) + z^2 &= 0 \\ x^2 - y^2 - \text{sen}(uv) + 2z^2 &= 0 \\ xy - \text{sen}(u)\cos(v) + z &= 0. \end{aligned}$$

Muestre que el sistema define a x, y, z como funciones de u y v en un entorno del punto $(x, y, z, u, v) = (1, 1, 0, \pi/2, 0)$. Calcule además $\partial x/\partial u$, $\partial x/\partial v$ y $\partial^2 x/\partial u^2$ el punto anterior.

(1,5 ptos.)

Tiempo: 3 horas.