MA22A-01 : Cálculo en Varias Variables
Control 2

Prof: Francisco Ortega
Aux: Alejandro Omon

17 Enero 1997

Pregunta 1. Sea $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ tal que a cada $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ asocia el número real $b(x, y)$.

b se dice bilineal ssi es lineal en cada una de sus componentes, en otras palabras

$$\begin{array}{ll} b(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha b(x_1, y) + \beta b(x_2, y) & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ & \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n \\ & \forall y \in \mathbb{R}^m \\ b(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha b(x, y_1) + \beta b(x, y_2) & \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ & \forall x \in \mathbb{R}^n \\ & \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m \end{array}$$

(a) Demuestre que existe $A \in M_{n\times m}$ tal que $b(x, y) = x^t A y$.

(b) Muestre que b es continua en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$
Ind: Inicialmente muestre que existe $C > 0$ tal que $|b(x, y)| \le C\|x\|\|y\|$ y concluya.

(c) Demuestre que b es fuertemente diferenciable y calcule $\partial b((x, y); (h, k))$

(d) Usando lo anterior de manera adecuada, calcule el diferencial de la función

$$f(x) = x^t A x + b^t x$$

donde A es una matriz de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$.

Pregunta 2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{17}{4} - x^2 - y^2 & \text{si } x^2 + y^2 < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } \frac{1}{4} \le x^2 + y^2 < 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } x^2 + y^2 \ge 1 \end{cases}$$

(a) Determine el dominio y estudie la continuidad de f.

(b) Determine y dibuje las curvas de nivel k de f para todo $k \in I\!R$.

(c) Determine el gradiente de f

(d) Calcule las derivadas direccionales de f en un punto (a,b) tal que $a^2+b^2=1$.

(e) Concluya sobre la diferenciabilidad de f.

Pregunta 3. **(a)** Sea $g : I\!R^2 \to I\!R$, $g \in \mathcal{C}^2(I\!R^2)$ y f una función de clase $\mathcal{C}^2$ sobre el abierto $\Omega = \{(x,y) \in I\!R^2 / y \neq 0\}$ tal que $f(x,y) = g(xy, \frac{x}{y})$.
Si f verifica la ecuación

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

y se definen $u = xy$; $v = \frac{x}{y}$ entonces

$$(uv + \frac{u}{v})\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2(1-v^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{v}{u}(1+v^2)\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + 2\frac{v^2}{u}\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

(b) Se define $F(x,y)$ por

$$F(x,y) = f(x; g(x)k(y); h(x,y))$$

Encuentre una expresión en términos de las derivadas parciales de f, g, k y h para

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

Tiempo : 3:00 Hrs.