CONTROL 2 Cálculo en Varias Variables

Prof. P. Felmer

1. Considere la superficie $S = \{(x, y, z) \in I\!R^3 / x^2 + y^2 - z = 0\}$.
   a) Encuentre el plano tangente a S en el punto $(0, -\pi, \pi^2)$.
   b) Considere la curva definida por $\sigma(t) = (tsent, tcost, t^2)$.
   Muestre que σ esta contenida en S y que pasa por el punto $(0, -\pi, \pi^2)$. ¿ Cuál es el valor de t allí?)
   Calcule el vector v, tangente a la curva en $(0, -\pi, \pi^2)$. Haga un dibujo.
   c) Encuentre la distancia mínima de $(3, 0, 0)$ a S. Determine el punto donde se alcanza.

2. Considere la función $f : I\!R^n \to I\!R$ y suponga que es de clase C^2.
   a) Demuestre que si f tiene un mínimo local en x_0 entonces la matriz Hessiana $Hf(x_0)$ es semidefinida positiva, es decir,
   $$h^t Hf(x_0) h \geq 0, \qquad \forall h \in I\!R^n.$$
   b) Suponga que la función $u : I\!R^n \to I\!R$ satisface la ecuación diferencial
   $$\Delta u(x) = -1 \qquad \forall x \in D^n.$$
   Demuestre que u no puede tener un mínimo local.

3. a) 80% Sea $u : I\!R^2 \setminus \{(0,0)\} \to I\!R$ una función de clase C^2 y sea $v : I\!R^2 \setminus \{(0,0)\} \to I\!R$ definida por
   $$v(x, y) = u(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2})$$
   Demuestre que u es armónica en $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$ sí y solo sí v es armónica en $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Obs.: La función v se conoce como transformada de Kelvin de u.
   b) 20% Encontrar la expansión de Taylor de orden 2 para
   $$f(x, y, z) = log(x^2 + y^2 + z^2)$$
   en torno a $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

Recuerdos. 1. Si $f : I\!R^n \to I\!R$ es de clase C^2 se define
$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x)$$
2. Si $f : \Omega \subset I\!R^n \to I\!R$ se dice armónica en Ω si
$$\Delta f(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega.$$